现代数学基础

# 36 索伯列夫空间

■ 王明新

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn

# 36 索伯列夫空间

王明新

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书作为一本研究生教材或参考书，较系统地介绍了各向同性的整指数（整数阶）索伯列夫（Sobolev）空间、实指数（分数阶）Sobolev 空间、关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间、Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间。书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题。

本书可作为微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学与相关理工科专业研究生的教材和教学参考书，亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

索伯列夫空间/王明新编著. —北京：高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-037037-9

Ⅰ. ①索… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①索伯列夫空间－研究生－教材 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 041470 号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 赵天夫　封面设计 赵　阳　版式设计 马敬茹
责任校对 胡晓琪　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社　咨询电话 400-810-0598
社　　址 北京市西城区德外大街4号　网　　址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120　http://www.hep.com.cn
印　　刷 北京中科印刷有限公司　网上订购 http://www.landraco.com
开　　本 787 mm×1092 mm 1/16　http://www.landraco.com.cn
印　　张 15.75　版　　次 2013年5月第1版
字　　数 240 千字　印　　次 2013年5月第1次印刷
购书热线 010-58581118　定　　价 49.00元



物 料 号 37037-00

# 前言

作为一本研究生教材或教学参考书, 本书较系统地介绍了各向同性的整指数(整数阶)索伯列夫(Sobolev)空间, 实指数 (分数阶) Sobolev 空间, 关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间, Morrey 空间 、Campanato 空间和 BMO 空间.

Sobolev 空间是由多个实变量弱可微函数组成的一些特殊可积空间的统称, 它们都是 Banach 空间. 虽然这些空间的原型早已出现, 但对其进行系统研究并使之成为一套理论, 是 20 世纪 30 年代初由苏联数学家 S. L. Sobolev 完成的. Sobolev 空间理论不但是一个非常有趣的数学分支, 其重要性是它在其他数学分支中的应用. 它不仅是偏微分方程近代理论的基础, 也是与分析学相关的其他数学分支的重要基础和必备工具, 是与分析学相关的各研究方向的研究生必修课.

所谓 Sobolev 空间理论, 就是研究这些函数空间的基本性质: 自反性 、可分性 、稠密性 (逼近) 、延拓 、嵌入定理 、内插不等式和边界迹 (迹定理), 而嵌入定理则是其核心内容.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本 Sobolev 空间理论的基础教材和参考书, 力求用较短的篇幅, 集中介绍那些业已证明的最常用而又最重要的内容. 由于偏微分方程是推动 Sobolev 空间理论

发展的主要动力, 本书的选材侧重于在偏微分方程的研究中应用较多的内容. Sobolev 空间有许多重要的推广, 除了第四章的 Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间之外, 本书没有涉及 Sobolev 空间的其他推广, 如 Lions 的迹空间、Besov 空间、Orlicz 空间、Orlicz-Sobolev 空间、BV 空间、Lorentz 空间等. 有兴趣的读者可以参见 R. A. Adams 的专著 [1] 及 R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier 的专著 [2].

本书的第一章是预备知识. 首先介绍若干记号和几个重要的初等不等式. 由于 $L^p$ 空间和 Hölder 空间是两个最简单和最基本的 Sobolev 空间, 也是建立其他类型的 Sobolev 空间的基础, 所以在 1.3 节和 1.4 节, 我们复述这两个空间的基本性质. Sobolev 空间中许多重要性质 (估计, 不等式等) 的推导, 大多都是先针对 "性质较好" 的函数 (光滑函数), 而后利用逼近 (稠密性) 过渡到原来的函数, 因而逼近是 Sobolev 空间研究中的一个常用方法. 把一个函数磨光, 是用光滑函数逼近一般可积函数的有效途径. 本章的 1.5 节介绍磨光函数及其性质. 截断方法是把问题局部化的一个重要手段, 它既能有效地保留原问题的局部性质, 又能避免邻域外各种因素的影响. 把问题局部化以后, 往往还需要把局部结果整合以得到整体结果, 而单位分解就是整合局部到整体的一个重要方法. 在第 1.7 节, 我们介绍截断与单位分解. Sobolev 空间中出现的导数几乎都是弱导数, 这是一种介于古典导数与广义导数之间的一种导数, 也是古典导数的推广. 在本章的最后一节, 我们介绍弱导数及其基本性质.

第二章是各向同性的整指数 (整数阶) Sobolev 空间, 这是 Sobolev 空间理论的最基本部分. 学完本章, 读者就可以了解该理论的基本思想和方法. 为了便于讲授和学习, 在不影响其基本思想的前提下, 我们只对 "适当好" 的开集的情况 (边界有适当的光滑性, 有时还要求是有界的, 甚至要求是有界区域), 给出每个定理的严格证明. 对于一般情况以及嵌入定理的反例, 单独作为一节, 只列出主要结果而省略了证明过程.

本章首先介绍各向同性的整指数 Sobolev 空间的定义和初等性质. 前面已经提到, 逼近是 Sobolev 空间中的常用手法, 在第 2.2 节, 我们根据集合的性质, 借助于磨光介绍三种逼近. 我们知道, 一个函数如果能够用 $C_0^\infty$ 函数来逼近, 那么研究起来就非常方便, 很多经典的分析工具都可以被利用. 对于开集 $\Omega$, 一般而言 $\mathring{W}_p^k(\Omega) \neq W_p^k(\Omega)$, 因此 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数不一定能用 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数来逼近. 但是我们知道 $\mathring{W}_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 所以 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中的函数可以用 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数来逼近. 因而, 能否把 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数延拓到 $\mathbb{R}^n$ 使之属于 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 并保留其原有性质, 成为非常关键的技术问题. 在第 2.3 节我们详细介绍这种延拓方法. 给定一个函数 $u \in C(\overline{\Omega})$, 我们知道 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值. 给定一个函数 $u \in W_p^k(\Omega)$ $(k \geqslant 1)$, 如何确定 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值呢? 在函数空间以及偏微分方程的研究中, 通常会涉及 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上的"广义取值". 这就是我们将在第 2.4 节介绍的边界迹. 在第 2.5 节, 我们介绍空间 $W_p^1(\Omega)$ 的基本性质. 第 2.6 节至第 2.9 节和第 2.11 节是 Sobolev 空间的最核心部分 —— Sobolev 不等式、Poincaré 不等式、嵌入定理和内插不等式, 这是重点讲授的内容. 第 2.10 节继续介绍迹定理, 主要介绍从空间 $W_p^k(\Omega)$ 到 $L^q(\partial\Omega)$ 的嵌入. 在第 2.12 节, 我们给出空间 $H^{-1}(\Omega)$ 的刻画. 第 2.13 节是嵌入定理的补充和反例. 第 2.14 节是空间 $W_p^k(\Omega)$ 的另一个重要性质 —— Banach 代数. 在本章的最后一节, 我们补充介绍几个嵌入常数与集合 $\Omega$ 无关的例子.

第三章介绍各向同性的实指数 (分数阶) Sobolev 空间. 先利用 Fourier 变换引入空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$, 并介绍其基本性质, 再介绍空间 $H^s(\Omega)$ 和 $W_p^s(\Omega)$. 基本思路和处理方法及途径与第二章相同.

第四章简单介绍 Sobolev 空间的三种推广 —— Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间. 它们刻画了 Hölder 连续函数的积分特征, 为研究函数的 Hölder 连续性提供了重要工具.

研究发展方程的解, 需要含有时间 $t$ 的 Sobolev 空间. 一般来说, 在一个发展方程中, 关于空间变量 $x$ 与时间变量 $t$ 的最高阶导数的阶

数是不同的. 因此, 我们不能把 $x$ 和 $t$ 同等看待, 需要引入 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间. 在第五章, 我们介绍与二阶抛物型方程的研究相关的一类 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间, 其基本思路和处理方法及途径与第二章相同.

通过本书的学习, 读者不仅可以了解和掌握 Sobolev 空间的基本理论和结果, 为自己今后的学习和研究做好必要的应用知识准备, 同时还可以学习和掌握许多重要的数学思想和技巧.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材和专著, 请参阅所附的参考文献. 作者用本书的讲义在东南大学、徐州师范大学和哈尔滨工业大学为研究生讲授过多次, 并得到东南大学优秀研究生教学用书建设立项的资助, 同时该课程还被评为东南大学优秀研究生课程. 本书的出版得到国家自然科学基金 (No.11071049) 和哈尔滨工业大学科研基金的资助. 李慧玲博士和陈文彦博士都讲授过本书的讲义, 东南大学、徐州师范大学和哈尔滨工业大学学习该课程的研究生及青年教师, 对本书的初稿都提出了许多宝贵的意见和修改建议, 在此一并致谢. 鉴于作者学识有限, 疏漏和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2012 年 12 月

# 现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

| | 书号 | 书名 | 著译者 |
|---|---|---|---|
| 1 | 21717-9 | 代数和编码（第三版） | 万哲先 编著 |
| 2 | 22174-9 | 应用偏微分方程讲义 | 姜礼尚、孔德兴、陈志浩 |
| 3 | 23597-5 | 实分析（第二版） | 程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著 |
| 4 | 22617-1 | 高等概率论及其应用 | 胡迪鹤 著 |
| 5 | 24307-9 | 线性代数与矩阵论（第二版） | 许以超 编著 |
| 6 | 24465-6 | 矩阵论 | 詹兴致 |
| 7 | 24461-8 | 可靠性统计 | 茆诗松、汤银才、王玲玲 编著 |
| 8 | 24750-3 | 泛函分析第二教程（第二版） | 夏道行 等编著 |
| 9 | 25317-7 | 无限维空间上的测度和积分<br>—— 抽象调和分析（第二版） | 夏道行 著 |
| 10 | 25772-4 | 奇异摄动问题中的渐近理论 | 倪明康、林武忠 |
| 11 | 27261-1 | 整体微分几何初步（第三版） | 沈一兵 编著 |
| 12 | 26360-2 | 数论 I —— Fermat 的梦想和类域论 | [日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著 |
| 13 | 26361-9 | 数论 II —— 岩泽理论和自守形式 | [日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著 |
| 14 | 26547-7 | 微分方程与数学物理问题 | [瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著 |
| 15 | 27486-8 | 有限群表示论（第二版） | 曹锡华、时俭益 |
| 16 | 27431-8 | 实变函数论与泛函分析<br>（上册，第二版修订本） | 夏道行 等编著 |
| 17 | 27248-2 | 实变函数论与泛函分析<br>（下册，第二版修订本） | 夏道行 等编著 |
| 18 | 28707-3 | 现代极限理论及其在随机结构中的应用 | 苏淳、冯群强、刘杰 著 |
| 19 | 30448-0 | 偏微分方程 | 孔德兴 |
| 20 | 31069-6 | 几何与拓扑的概念导引 | 古志鸣 编著 |
| 21 | 31611-7 | 控制论中的矩阵计算 | 徐树方 著 |
| 22 | 31698-8 | 多项式代数 | 王东明 等编著 |
| 23 | 31966-8 | 矩阵计算六讲 | 徐树方、钱江 著 |
| 24 | 31958-3 | 变分学讲义 | 张恭庆 编著 |
| 25 | 32281-1 | 现代极小曲面讲义 | [巴西] F. Xavier、潮小李 编著 |

续表

| | 书号 | 书名 | 著译者 |
|---|---|---|---|
| 26 | 32711-3 | 群表示论 | 丘维声 编著 |
| 27 | 34675-6 | 可靠性数学引论（修订版） | 曹晋华、程侃 著 |
| 28 | 34311-3 | 复变函数专题选讲 | 余家荣、路见可 主编 |
| 29 | 35738-7 | 次正常算子解析理论 | 夏道行 |
| 30 | 34834-7 | 数论——从同余的观点出发 | 蔡天新 |
| 31 | 36268-8 | 多复变函数论 | 萧荫堂、陈志华、钟家庆 |
| 32 | 36168-1 | 工程数学的新方法 | 蒋耀林 |
| 33 | 34525-4 | 现代芬斯勒几何初步 | 沈一兵、沈忠民 |
| 34 | 36472-9 | 数论基础 | 潘承洞 著 |
| 35 | 36950-2 | Toeplitz 系统预处理方法 | 金小庆 著 |
| 36 | 37037-9 | 索伯列夫空间 | 王明新 |

目录

目　录

# 第一章　预备知识

作为预备知识，本章介绍若干记号，几个重要不等式，空间 $L^p(\Omega)$ 的几个重要性质，Hölder 空间，函数的磨光，截断与分解和弱导数。

## 1.1 若干记号

贯穿本书的始终，区域这个术语表示连通开集。$\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维欧式空间。除非特别说明，$\Omega$ 总表示 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。

用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点，其范数记为 $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$。用 $x\cdot y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ 表示 $x$ 与 $y$ 的内积。通常把 $\mathbb{R}^1$ 简记为 $\mathbb{R}$。便于应用，有时也把 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $x$ 写成 $x=(x',x_n)$，其中 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$。记 $\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\}$，$\overline{\mathbb{R}^n_+}=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n\geqslant 0\}$。设 $p>0$，称 $p'=p/(p-1)$ 为 $p$ 的共轭指数。

用符号 "a.e." 表示 "几乎处处"，用符号 "$\forall$" 表示 "任意的" 或 "所有的"。

对于给定的 $r>0$ 以及点 $x$，记 $B_r(x)$ 是以 $x$ 为球心、以 $r$ 为半径的球。当 $x=0$ 时，通常简记 $B_r=B_r(0)$。

给定一个集合 $\Omega$，用 $\partial\Omega$ 表示 $\Omega$ 的边界，$\overline{\Omega}=\partial\Omega\cup\Omega$ 表示 $\Omega$ 的闭

包，$\Omega^c$ 表示 $\Omega$ 的余集．对于点 $x$ 和集合 $A$，分别用 $\mathrm{dist}(x,\Omega)$ 和 $\mathrm{dist}(A,\Omega)$ 表示点 $x$ 到集合 $\Omega$ 和集合 $A$ 到集合 $\Omega$ 的距离

$$\mathrm{dist}(x,\Omega)=\inf_{y\in\Omega}\|x-y\|,\quad \mathrm{dist}(A,\Omega)=\inf_{x\in A}\mathrm{dist}(x,\Omega).$$

对于 $\varepsilon>0$，记 $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$．

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个集合 $A$ 和 $B$，其中 $A$ 是有界集，$B$ 是开集．如果 $\bar{A}\subset B$，则称 $A$ 紧包含于 $B$，记成$A\Subset B$，或者 $B\Supset A$．

给定集合 $A\subset\mathbb{R}^n$．对于向量（点）$h\in\mathbb{R}^n$ 和子集 $A'\subset A$ 以及定义在 $A$ 上的函数 $u$，用 $u^h(x)=u(x+h)$ 表示 $u$ 关于 $h$ 的平移，用 $u|_{A'}$ 表示 $u$ 在 $A'$ 上的限制．函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称为集合 $A$ 的特征函数．

假设 $\Omega$ 是一个可测集，用 $|\Omega|$ 表示 $\Omega$ 的测度．对于给定的 $u\in L^1(\Omega)$，用

$$⨍_\Omega u(x)\mathrm{d}x:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$$

表示 $u$ 在 $\Omega$ 上的平均．有时又把 $⨍_\Omega u(x)\mathrm{d}x$ 简写成 $u_\Omega$．

给定一个函数 $u$，定义它的正部 $u^+(x)$ 与负部 $u^-(x)$：

$$u^+(x)=\begin{cases}u(x), & u(x)\geqslant 0,\\ 0, & u(x)<0,\end{cases}\quad u^-(x)=\begin{cases}0, & u(x)>0,\\ u(x), & u(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

那么，$u=u^++u^-$，$|u|=u^+-u^-$．

设 $\Omega$ 是开集，$u$ 是定义在 $\Omega$ 上的函数．集合

$$\mathrm{spt}\{u\}=\overline{\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\}}$$

称为 $u$ 的支集．当 $\mathrm{spt}\{u\}\Subset\Omega$ 时，就称 $u$ 在 $\Omega$ 内具有紧支集，有时也简称 $u$ 具有紧支集．

设 $k$ 是非负整数 ($k$ 也可以是 $\infty$). 用 $C_0^k(\Omega)$ 表示空间 $C^k(\Omega)$ 中所有具有紧支集的函数构成的集合, 有时也把 $C_0^k(\Omega)$ 写成 $C_c^k(\Omega)$. 再定义空间

$$C_b^k(\Omega)=\left\{u\in C^k(\Omega):\ D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 内有界}, \forall\ |\alpha|\leqslant k\right\}.$$

设 $\alpha_i$ 是非负整数, $i=1,\cdots,n$. 数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 被称为多重指标, 称数 $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ 为 $\alpha$ 的长度. 通常简记

$$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!.$$

给定两个多重指标 $\alpha$ 和 $\beta$, 如果对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$, 都有 $\beta_i\leqslant\alpha_i$, 则称 $\beta\leqslant\alpha$. 这时, $\alpha-\beta$ 也是一个多重指标, 并且 $|\alpha-\beta|+|\beta|=|\alpha|$. 当 $\beta\leqslant\alpha$ 时, 简记

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, 这是一个次数为 $|\alpha|$ 的单项式. 记 $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, 用 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ 或者 $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ 表示一个阶数为 $|\alpha|$ 的微分算子. 给定一个函数 $u$, 导数 $D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}=\partial^\alpha u$ 称为 $u$ 的 $\alpha$ 阶导数 (如果有端有意义). 对于在 $x$ 附近 $|\alpha|$ 次可微的函数 $u$ 和 $v$, 下面的 Leibniz 公式成立

$$D^\alpha(uv)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v.$$

对于 $f\in L^p(\Omega)$, $g\in W_p^k(\Omega)$, 通常简记 $\|f\|_{p,\Omega}=\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\|g\|_{k,p,\Omega}=\|g\|_{W_p^k(\Omega)}$. 如果所讨论的问题中集合 $\Omega$ 是固定的, 又简记 $\|f\|_p=\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\|g\|_{k,p}=\|g\|_{W_p^k(\Omega)}$.

设 $X$ 是 Banach 空间, $X'$ 是它的对偶空间. 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $X$ 与 $X'$ 之间的对偶积.

## 1.2 几个初等不等式

**定理 1.2.1** 设 $p\geqslant1$, 那么对于任意的数 $a$ 和 $b$, 有

$$(|a|+|b|)^p\leqslant2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right).\tag{1.2.1}$$

**证明** 不妨假设 $a$ 和 $b$ 都是非负实数, 并且 $b \geqslant a$. 取

$$f(b) = (a+b)^p - 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

那么 $f(a) = 0$, $f'(b) \leqslant 0$ 对于任意的 $b \geqslant a$ 成立. 从而不等式 (1.2.1) 成立. 证毕

**定理 1.2.2 (Jensen 不等式)** *设 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数, $u$ 是 $(a,b)$ 上的可积函数, 那么*

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u(t))\mathrm{d}t.$$

**证明** 令 $\overline{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t$. 记 $y = m(x-\overline{u}) + f(\overline{u})$ 是 $f$ 在 $\overline{u}$ 处的一条支撑直线. 那么 $f(x) \geqslant m(x-\overline{u}) + f(\overline{u})$. 取 $x = u(t)$, 则有

$$f(u(t)) \geqslant m\big[u(t) - \overline{u}\big] + f(\overline{u}), \quad \text{a.e. } t \in (a,b).$$

从而

$$\int_a^b f(u(t))\mathrm{d}t \geqslant m\int_a^b u(t)\mathrm{d}t - m\overline{u}(b-a) + f(\overline{u})(b-a) = f(\overline{u})(b-a).$$

故结论成立. 证毕

**定理 1.2.3 (Young 不等式)** *若 $a, b > 0$, $p, q > 1$ 且满足 $1/p + 1/q = 1$, 那么*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

**证明** 在 Jensen 不等式中取

$$f(x) = e^x, \quad u(t) = \begin{cases} p\ln a, & 0 \leqslant t \leqslant 1/p, \\ q\ln b, & 1/p < t \leqslant 1. \end{cases}$$

则有

$$f\left(\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 f(u(t))\mathrm{d}t,$$

即

$$ab=f(\ln a+\ln b)=f\left(\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\int_0^1 f(u(t))\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{1/p}\mathrm{e}^{p\ln a}\mathrm{d}t+\int_{1/p}^1\mathrm{e}^{q\ln b}\mathrm{d}t=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

**定理 1.2.4 (带 $\varepsilon$ 的 Young 不等式)** 设 $a,b,\varepsilon>0$, $p,q>1$ 且满足 $1/p+1/q=1$. 则有

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{\varepsilon^{-q/p}}{q}b^q \tag{1.2.2}$$

证明留作习题.

当 $p=q=2$ 时, 不等式 (1.2.2) 就是带 $\varepsilon$ 的 Cauchy 不等式. 当 $\varepsilon=1$ 且 $p=q=2$ 时, 不等式 (1.2.2) 就是通常的 Cauchy 不等式.

**定理 1.2.5 (离散形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式)** 假设 $1\leqslant p\leqslant\infty, q=p/(p-1)$, 则有

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q}, \tag{1.2.3}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}, \tag{1.2.4}$$

这里, 当 $p=\infty$ 时, 认定 $\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}=\max_k|b_k|$.

把证明放在定理 1.3.3 的后面.

空间 $L^p(\Omega)$ 是一个最简单的 Sobolev 空间. 它是建立其他类型的 Sobolev 空间的基础. 为了便于读者阅读, 下面几节复述空间 $L^p(\Omega)$ 的一些基本结论.

## 1.3 空间 $L^p(\Omega)$

本节总假设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $p$ 是正实数. 用 $L^p(\Omega)$ 表示定义在 $\Omega$ 上并满足

$$\int_\Omega|u(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$$

的所有可测函数构成的集合. 在 $L^p(\Omega)$ 中, 两个几乎处处相等的函数被看成同一个. 易证, $L^p(\Omega)$ 是一个向量空间. 对于 $u \in L^p(\Omega)$, 定义

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

容易验证, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $\|u\|_{p,\Omega}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的范数, 从而 $L^p(\Omega)$ 是赋范空间. 而当 $0 < p < 1$ 时, $\|u\|_{p,\Omega}$ 不是范数.

称可测集 $\Omega$ 上的一个可测函数 $u$ 在 $\Omega$ 上本性有界 (有时也简称为有界), 如果存在正常数 $C$, 使得 $|u(x)| \leqslant C$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立. 这种常数 $C$ 的下确界被称为 $u$ 在 $\Omega$ 上的本性上界, 记为 $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} u(x)$. 容易验证, 由

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$$

定义的泛函 $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ 是空间 $L^\infty(\Omega)$ 上的一个范数. 所以 $L^\infty(\Omega)$ 也是赋范空间. 通常又把 ess sup 简写成 sup.

### 1.3.1 几个常用不等式

**定理 1.3.1 (Hölder 不等式)** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $q = p/(p-1)$. 若 $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, 则 $uv \in L^1(\Omega)$, 并且

$$\int_\Omega |uv|\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_p\|v\|_q.$$

**证明** 当 $p=1$ 或者 $p=\infty$ 时, 结论显然成立. 当 $1<p<\infty$ 时, 应用带 $\varepsilon$ 的 Young 不等式知

$$|uv| \leqslant \varepsilon|u|^p + \frac{(p\varepsilon)^{-q/p}}{q}|v|^q.$$

上式两边在 $\Omega$ 上积分并取

$$\varepsilon = \frac{\|v\|_q}{p\|u\|_p^{p-1}},$$

即知结论成立. 证毕.

特别地, 当 $p=q=2$ 时, 上式成为

$$\int_\Omega |uv|\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_2\|v\|_2,$$

称之为 Schwarz 不等式. Hölder 不等式还可以推广为: 若 $p_j>1$ 且满足 $1/p_1+\cdots+1/p_m=1$, $u_j\in L^{p_j}(\Omega)$, 则 $u_1\cdots u_m\in L^1(\Omega)$, 并且

$$\int_\Omega |u_1\cdots u_m|\mathrm{d}x\leqslant \|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_m\|_{p_m}.$$

**定理 1.3.2** 设 $u\in L^p(\Omega)$, $1\leqslant q<r<p$, $\alpha\in(0,1)$ 且满足 $\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{q}+\frac{1-\alpha}{p}$, 那么

$$\|u\|_r\leqslant\|u\|_q^{\alpha}\|u\|_p^{1-\alpha}.$$

**证明** 如果 $u\notin L^q(\Omega)$, 那么 $\|u\|_q=\infty$, 要证的不等式显然成立. 下面假设 $u\in L^q(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^r\mathrm{d}x&=\int_\Omega |u|^{\alpha r+(1-\alpha)r}\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_\Omega |u|^{\alpha r\frac{q}{\alpha r}}\mathrm{d}x\right)^{\alpha r/q}\left(\int_\Omega |u|^{(1-\alpha)r\frac{p}{(1-\alpha)r}}\mathrm{d}x\right)^{(1-\alpha)r/p}\\&=\|u\|_q^{\alpha r}\|u\|_p^{(1-\alpha)r}.\end{aligned}$$

**定理 1.3.3 (Minkowski 不等式)** 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 对于 $u,v\in L^p(\Omega)$, 有

$$\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p.$$

**证明** 当 $p=1$ 或者 $p=\infty$ 时, 结论显然成立. 当 $1<p<\infty$ 时, 应用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|u+v\|_p^p&=\int_\Omega |u+v|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega |u+v|^{p-1}|u|\mathrm{d}x+\int_\Omega |u+v|^{p-1}|v|\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_\Omega |u+v|^p\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega |v|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right]\\&=\|u+v\|_p^{p-1}(\|u\|_p+\|v\|_p).\end{aligned}$$

**定理 1.2.5 的证明** 当 $p=1$ 或者 $p=\infty$ 时, 结论显然成立. 下面假设 $1<p<\infty$. 在区间 $[0,n]$ 上定义两个函数

$$u(x)=a_j,\quad v(x)=b_j,\quad x\in[j-1,j],\quad j=1,2,\cdots,n$$

对于这样的函数 $u$ 和 $v$, 利用定理 1.3.1 可得不等式 (1.2.3), 利用定理 1.3.3 可得不等式 (1.2.4). 证毕.

**定理 1.3.4 (逆 Hölder 不等式)**　假设 $0 < p < 1$ (因此, $p' = p/(p-1) < 0$), $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$0 < \int_\Omega |v|^{p'} \mathrm{d}x < \infty,$$

则有

$$\int_\Omega |uv| \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^{p'} \mathrm{d}x\right)^{1/p'} \tag{1.3.1}$$

**证明**　不妨假设 $uv \in L^1(\Omega)$, 否则不等式 (1.3.1) 的左端为无穷大, 结论自然成立. 令 $\phi = |v|^{-p}$, $\psi = |uv|^p$. 那么 $\phi\psi = |u|^p$. 显然, $\psi \in L^q(\Omega)$, 其中 $q = 1/p > 1$. 由于 $p' = -pq'$, 其中 $q' = q/(q-1)$, 因而 $\phi \in L^{q'}(\Omega)$. 直接利用 Hölder 不等式可得

$$\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \phi\psi \mathrm{d}x \leqslant \|\phi\|_{q'} \|\psi\|_q = \left(\int_\Omega |uv| \mathrm{d}x\right)^p \left(\int_\Omega |v|^{p'} \mathrm{d}x\right)^{1-p}$$

两边开 $p$ 次方, 再除以右端最后那个因子, 即得不等式 (1.3.1). 证毕.

**定理 1.3.5 (逆 Minkowski 不等式)**　假设 $0 < p < 1$. 对于 $u$, $v \in L^p(\Omega)$, 有

$$\||u| + |v|\|_p \geqslant \|u\|_p + \|v\|_p. \tag{1.3.2}$$

**证明**　如果 $u$ 和 $v$ 都恒为零, 不等式 (1.3.2) 显然成立. 如果 $u$ 或者 $v$ 有一个不恒为零, 那么不等式 (1.3.2) 的左端大于零. 由于

$$\||u| + |v|\|_p^p = \int_\Omega (|u| + |v|)^{p-1} |u| \mathrm{d}x + \int_\Omega (|u| + |v|)^{p-1} |v| \mathrm{d}x,$$

对右端两项分别利用逆 Hölder 不等式 (1.3.1) 得

$$\begin{aligned}\||u| + |v|\|_p^p &\geqslant \left(\int_\Omega (|u| + |v|)^{(p-1)p'} \mathrm{d}x\right)^{1/p'} (\|u\|_p + \|v\|_p) \\ &= \||u| + |v|\|_p^{p/p'} (\|u\|_p + \|v\|_p).\end{aligned}$$

两边消去 $\||u| + |v|\|_p^{p/p'}$ 即得不等式 (1.3.2). 证毕.

### 1.3.2 完备性, $L^p(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 之间的关系

**定理 1.3.6** 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间.

**证明** 只需证明 $L^p(\Omega)$ 是完备的. 我们先讨论 $1 \leqslant p < \infty$ 的情况. 假设 $\{u_k\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列, 那么存在子列 $\{u_{k_j}\}$, 使得

$$\|u_{k_{j+1}} - u_{k_j}\|_{p,\Omega} \leqslant 2^{-j}, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

定义 $v_m(x) = \sum_{j=1}^m |u_{k_{j+1}}(x) - u_{k_j}(x)|$. 显然, $v_m(x)$ 是单增的, 故极限 $\lim\limits_{m\to\infty} v_m(x) = v(x)$ 存在 (在某些点 $x$ 处, $v(x)$ 可以是无穷). 利用 Minkowski 不等式知

$$\|v_m\|_{p,\Omega} \leqslant \sum_{j=1}^m 2^{-j} < 1, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

再利用 Fatou 引理得

$$\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |v_m(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 1.$$

这说明在 $L^p(\Omega)$ 中 $v(x) < \infty$ 几乎处处成立. 因而, 级数

$$u_{k_1} + \sum_{j=1}^\infty \left[u_{k_{j+1}}(x) - u_{k_j}(x)\right]$$

在 $\Omega$ 中几乎处处收敛于某个函数 $u(x)$, 即

$$\lim_{j\to\infty} u_{k_j}(x) = u(x) \quad \text{a.e. 于 } \Omega.$$

在不收敛的点 $x$ 上定义 $u(x) = 0$.

因为 $\{u_k\}$ 是 Cauchy 列, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $K$, 使得当 $k, l \geqslant K$ 时, 有 $\|u_l - u_k\|_{p,\Omega} < \varepsilon$. 固定 $k \geqslant K$, 再次利用 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x) - u_k(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |u_{k_j}(x) - u_k(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |u_{k_j}(x) - u_k(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon^p.\end{aligned}$$

于是，$u=(u-u_k)+u_k\in L^p(\Omega)$，并且当 $k\to\infty$ 时，$\|u_k-u\|_{p,\Omega}\to 0$。所以 $L^p(\Omega)$ 是完备的。

再考虑 $p=\infty$ 的情况。假设 $\{u_k\}$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列，则存在正常数 $C$ 以及零测集 $A\subset\Omega$ 使得对于任意的 $x\in\Omega\setminus A$，

$$|u_k(x)|\leqslant\|u_k\|_{\infty,\Omega}\leqslant C,\quad |u_k(x)-u_j(x)|\leqslant\|u_k-u_j\|_{\infty,\Omega}\longrightarrow 0.$$

由此知 $\{u_k(x)\}$ 在 $\Omega\setminus A$ 上一致收敛于某个有界函数 $u(x)$。若在 $A$ 上定义 $u(x)=0$，那么 $u\in L^\infty(\Omega)$ 并且 $\|u_k-u\|_{\infty,\Omega}\to 0$。因此，$L^\infty(\Omega)$ 是完备的。证毕

**定理 1.3.7** 假设 $|\Omega|<\infty$。

(1) 如果 $u\in L^\infty(\Omega)$，那么对于任意的 $1\leqslant p<\infty$，有 $u\in L^p(\Omega)$ 并且

$$\lim_{p\to\infty}\|u\|_p=\|u\|_\infty;$$

(2) 若对任意的 $1\leqslant p<\infty$，都有 $u\in L^p(\Omega)$，并且存在正常数 $C$，使得

$$\|u\|_p\leqslant C,\quad \forall\, 1\leqslant p<\infty, \tag{1.3.3}$$

那么 $u\in L^\infty(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_\infty\leqslant C. \tag{1.3.4}$$

**证明** (1) 由于

$$\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_\infty^p|\Omega|,$$

所以对于任意的 $1\leqslant p<\infty$ 都有 $u\in L^p(\Omega)$ 并且 $\limsup\limits_{p\to\infty}\|u\|_p\leqslant\|u\|_\infty$。

另一方面，对于任意的 $\varepsilon>0$，易知集合 $\Omega'=\{x\in\Omega: |u(x)|\geqslant\|u\|_\infty-\varepsilon\}$ 的测度大于零。从而

$$\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\geqslant\int_{\Omega'}|u|^p\mathrm{d}x\geqslant(\|u\|_\infty-\varepsilon)^p|\Omega'|.$$

由此得 $\|u\|_p \geqslant (\|u\|_\infty - \varepsilon)|\Omega'|^{1/p}$, 进而又推出

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant \|u\|_\infty. \tag{1.3.5}$$

结论 (1) 成立.

(2) 现在假定 (1.3.3) 式成立. 如果 $u \notin L^\infty(\Omega)$, 或者 $u \in L^\infty(\Omega)$ 但是 (1.3.4) 式不成立, 则存在常数 $C^* > C$ 和集合 $\Omega' \subset \Omega$, 使得 $|\Omega'| > 0$ 并且

$$|u(x)| \geqslant C^*, \quad \forall\, x \in \Omega'.$$

同于 (1.3.5) 式的证明可以推出 $\liminf\limits_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant C^*$. 此与 (1.3.3) 式矛盾. 证毕.

### 1.3.3 整体连续性

设 $f \in L^p(\Omega)$, 把 $f$ 零延拓到 $\mathbb{R}^n$, 延拓后的函数仍记为 $f$.

**定义 1.3.1** *称 $f$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是整体连续的 (有时也称为经过自变量的平移关于范数是连续的), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 当 $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \delta$ 时, 有*

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{1.3.6}$$

**定理 1.3.8** *假设 $1 \leqslant p < \infty$, 那么 $L^p(\Omega)$ 中的函数是整体连续的.*

**证明** 第一步 讨论 $\Omega$ 有界的情况. 设 $f \in L^p(\Omega)$, 并记 $f^h(x) = f(x+h)$. 根据 Lebesgue 积分的绝对连续性, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|\Omega'| < \delta_1$ 时,

$$\int_{\Omega'} |f|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3 \times 2^{p-1}}. \tag{1.3.7}$$

取 $\sigma > 0$, 使得 $|\Omega \setminus \Omega_\sigma| < \delta_1/4$, 其中 $\Omega_\sigma = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \sigma\}$. 由于 $f$ 在 $\Omega$ 上可测, 故存在闭集 $F \subset \Omega_\sigma$, 使得 $f$ 在 $F$ 上连续, 并且

$$|F| > |\Omega_\sigma| - \delta_1/4 > |\Omega| - \delta_1/2.$$

又因为 $f$ 在 $F$ 上一致连续, 所以存在 $\delta_2 > 0$, 当点 $x, x+h \in F$ 并且 $|h| < \delta_2$ 时, 有

$$|f^h(x) - f(x)|^p = |f(x+h) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon}{3|\Omega|}. \tag{1.3.8}$$

用 $A^x$ 表示集合 $A$ 关于向量 $x$ 的平移. 设 $|h| < \delta = \min\{\sigma, \delta_1, \delta_2\}$. 显然, $F^{-h} \subset \Omega$. 考虑交集 $E = F \cap F^{-h}$. 由于

$$\begin{aligned} |E| &= |F \setminus (\Omega \setminus F^{-h})| \geqslant |F| - |\Omega \setminus F^{-h}| \\ &= |F| - (|\Omega| - |F^{-h}|) = 2|F| - |\Omega| \\ &> |\Omega| - \delta_1, \end{aligned}$$

因此, $|\Omega \setminus E| < \delta_1$. 又因为当 $x \in E$ 时, $x, x+h \in F$, 故在 $E$ 上不等式 (1.3.8) 成立. 从而

$$\int_E |f^h(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3.9}$$

注意到函数 $f$ 在 $\Omega$ 的外部等于零, 所以

$$\begin{aligned} &\int_{(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E} |f^h(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2^{p-1}\left(\int_{(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E} |f^h(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\Omega\setminus E} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right), \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

并且

$$\int_{(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E} |f^h(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{[(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E]^h} |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\Omega\cap[(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E]^h} |f(x)|^p \mathrm{d}x.$$

因为

$$|\Omega \cap [(\Omega \cup \Omega^{-h}) \setminus E]^h| = |\Omega \cap [(\Omega^h \cup \Omega) \setminus E^h]| = |\Omega \setminus E^h| = |\Omega \setminus E| < \delta_1,$$

根据不等式 (1.3.7) 和 (1.3.10) 得

$$\int_{(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E} |f^h(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{1.3.11}$$

由于

$$\int_{\Omega}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega\cup\Omega^{-h}}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$=\int_E|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$+\int_{(\Omega\cup\Omega^{-h})\setminus E}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

利用不等式 (1.3.9) 和 (1.3.11) 便知, 当 $|h|<\delta$ 时不等式 (1.3.6) 成立.

**第二步** 讨论 $\Omega$ 无界的情况. 若记 $\Omega_k=\Omega\cap\{|x|>k\}$, 那么对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $K\gg1$, 当 $k>K$ 时

$$\int_{\Omega_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

固定 $k>K$, 则当 $|h|<1$ 时,

$$\int_{\Omega}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{\Omega_{k+1}}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{k+1}^c}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant2^p\int_{\Omega_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{k+1}^c}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant2^p\varepsilon+\int_{\Omega_{k+1}^c}|f^h(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

因为 $\Omega_{k+1}^c$ 有界, 利用已证结果知, 当 $|h|\ll1$ 时上式右端第二项不超过 $\varepsilon$. 证毕.

### 1.3.4 可分性、一致凸性与自反性

为了研究后面定义的 Sobolev 空间 $W_p^k(\Omega)$ 的可分性、一致凸性与自反性的需要, 本节讨论空间 $L^p(\Omega)$ 的可分性、一致凸性与自反性. 我们先讨论可分性.

给定一个实函数, 如果它的值域是有限个实数, 则称它为简单函数.

**定理 1.3.9** *如果 $1\leqslant p<\infty$, 那么 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.*

**证明**　设 $u\in L^p(\Omega)$, $\varepsilon>0$. 欲证明: 存在 $f\in C_0(\Omega)$, 使得 $\|f-u\|_p<\varepsilon$. 分解 $u=u^+ + u^-$. 如果对于 $u^+$ 和 $u^-$ 能够分别找到函数 $f,g\in C_0(\Omega)$, 使得 $\|f-u^+\|_p<\varepsilon/2$, $\|g-u^-\|_p<\varepsilon/2$, 那么结论成立. 因此, 不妨假设 $u$ 是非负的.

因为 $u\in L^p(\Omega)$, 所以存在 $N\gg 1$, 使得 $\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega_N)}<\varepsilon/2$, 其中 $\Omega_N=\{x\in\Omega: |x|\leqslant N\}$. 对于有界集 $\Omega_N$ 而言, 如果能够找到函数 $f\in C_0(\Omega_N)$, 使得 $\|f-u\|_{L^p(\Omega_N)}<\varepsilon/2$, 那么 $f\in C_0(\Omega)$, 并且 $\|f-u\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon$, 因而结论成立. 下面, 不妨假设 $\Omega$ 有界.

利用附录的定理 A.6 知, 存在一个在 $\Omega$ 上点点收敛于 $u$ 的单调递增的非负简单函数列 $\{s_k\}$. 由于 $0\leqslant s_k(x)\leqslant u(x)$, 故 $s_k\in L^p(\Omega)$. 又因为 $(u-s_k)^p\leqslant u^p$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $s_k\longrightarrow u$. 选取 $s\in\{s_k\}$, 使 $\|s-u\|_p<\varepsilon/2$. 由于 $s$ 是简单函数, 若把 $s$ 在 $\Omega^c$ 上的值修改为零, 那么新的 $s$ 仍然是简单函数, 并且不等式 $\|s-u\|_p<\varepsilon/2$ 还成立. 因此, 可以假设在 $\Omega^c$ 上 $s(x)=0$.

如果在 $\Omega$ 上 $s(x)=0$, 那么 $s\in C_0(\Omega)$, 结论成立. 如果在 $\Omega$ 上 $s(x)\not\equiv 0$, 那么 $\|s\|_\infty>0$. 应用定理 A.7 (Lusin 定理) 知, 存在函数 $f\in C_0(\Omega)$, 使得

$$\max_{\overline{\Omega}}|f(x)|\leqslant\|s\|_\infty,\quad \left|\{x\in\Omega: s(x)\neq f(x)\}\right|<\left(\frac{\varepsilon}{4\|s\|_\infty}\right)^p.$$

于是

$$\begin{aligned}\|s-f\|_p&\leqslant\|s-f\|_\infty\left|\{x\in\Omega: s(x)\neq f(x)\}\right|^{1/p}\\&\leqslant 2\|s\|_\infty\frac{\varepsilon}{4\|s\|_\infty}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由此得 $\|f-u\|_p<\varepsilon$. 证毕.

**定理 1.3.10**　当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 空间 $L^p(\Omega)$ 是可分的.

**证明**　对于 $j=1,2,\cdots$, 定义

$$\overline{\Omega}_j=\{x\in\Omega:|x|\leqslant j,\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\geqslant 1/j\},$$

那么 $\overline{\Omega}_j$ 是 $\Omega$ 的紧子集. 记 $P$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上系数为有理数的全体多项式构成的集合, $P_j=\{\chi_{\overline{\Omega}_j}\phi : \phi\in P\}$. 由推论 A.4 知, $P_j$ 在 $C(\overline{\Omega}_j)$ 中稠密, 而且 $\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j$ 是可数的.

对于 $\varepsilon>0$ 和 $u\in L^p(\Omega)$, 应用定理 1.3.9 知, 存在 $f\in C_0(\Omega)$, $\|f-u\|_p<\varepsilon/2$. 显然, 对于任何 $j$, 有 $f\in C(\overline{\Omega}_j)$. 容易看出, 当 $j$ 满足

$$\operatorname{dist}(\operatorname{spt}\{f\},\partial\Omega)>1/j,\quad \operatorname{spt}\{f\}\subset\Omega_j$$

时, $f$ 在 $\overline{\Omega}_j$ 的外部恒为零. 因为 $P_j$ 在 $C(\overline{\Omega}_j)$ 中稠密, 故存在 $\phi_j\in P_j$ 使得 $\|f-\phi_j\|_{L^\infty(\Omega_j)}<(\varepsilon/2)|\Omega_j|^{-1/p}$. 又因为 $f$ 和 $\phi_j$ 在 $\overline{\Omega}_j$ 的外部都为零, 所以

$$\|f-\phi_j\|_{\infty,\Omega}=\|f-\phi_j\|_{\infty,\Omega_j}<\frac{\varepsilon}{2}|\Omega_j|^{-1/p}.$$

因此

$$\|f-\phi_j\|_{p,\Omega}=\|f-\phi_j\|_{p,\Omega_j}\leqslant\|f-\phi_j\|_{\infty,\Omega}|\Omega_j|^{1/p}<\varepsilon/2,$$

$$\|\phi_j-u\|_{p,\Omega}\leqslant\|f-u\|_{p,\Omega}+\|f-\phi_j\|_{p,\Omega}<\varepsilon.$$

这表明可数集 $\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j$ 在 $L^p(\Omega)$ 稠密. 所以 $L^p(\Omega)$ 是可分的. 证毕.

下面讨论空间 $L^p(\Omega)$ 的一致凸性与自反性. 为此, 先证明 Clarkson 不等式.

**定理 1.3.11 (Clarkson 不等式)** 假设 $1<p<\infty$, $u,v\in L^p(\Omega)$. 记 $p'=p/(p-1)$.

(1) 当 $2\leqslant p<\infty$ 时,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p, \tag{1.3.12}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}\geqslant\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1}. \tag{1.3.13}$$

(2) 当 $1<p\leqslant 2$ 时,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p, \tag{1.3.14}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1} \tag{1.3.15}$$

为证 Clarkson 不等式, 我们先证明 3 个引理

**引理 1.3.1** *如果 $0<s<1$, 那么函数 $f(x)=(1-s^x)/x$ 关于 $x>0$ 是严格单调递减的.*

**证明** 记 $g(t)=t-t\ln t$, 则

$$f'(x)=x^{-2}[g(s^x)-1].$$

因为 $0<s^x<1$, 并且当 $0<t<1$ 时, $g'(t)=-\ln t>0$, 所以 $g(s^x)<g(1)=1$. 由此得 $f'(x)<0$. 证毕

**引理 1.3.2** *对于 $1<p\leqslant 2, 0\leqslant t\leqslant 1$, 成立:*

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{1-t}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)} \tag{1.3.16}$$

**证明** 因为当 $p=2$, 或者 $t=0$ 或者 $t=1$ 时, 式 (1.3.16) 中的等号显然成立 下面我们假设 $1<p<2, 0<t<1$ 变换 $t=(1-s)/(1+s)$ 把区间 $0<t<1$ 变成区间 $0<s<1$, 把不等式 (1.3.16) 变成等价的不等式

$$\frac{1}{2}[(1+s)^p+(1-s)^p]-(1+s^{p'})^{p-1}\geqslant 0 \tag{1.3.17}$$

如果记

$$\binom{p}{0}=1,\quad\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!},\quad k\geqslant 1,$$

那么不等式 (1.3.17) 左端的幂级数展开式为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-s)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{kp'}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k}s^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{kp'}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}s^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}s^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}s^{2kp'}\right]
\end{aligned}$$

当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时, 右端级数收敛. 我们将通过证明当 $0<s<1$ 时, 级数中的每一项都是正的来完成引理的证明.

事实上, 级数中的第 $k$ 项可以写成

$$\begin{aligned}
&\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}s^{2k}\\
&-\frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}s^{p'(2k-1)}\\
&+\frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}s^{2kp'}\\
=&\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}(p-1)\\
&\left(\frac{p}{2k(2k-p)}-\frac{s^{p'(2k-1)-2k}}{2k-p}+\frac{s^{2kp'-2k}}{2k}\right)\\
=&\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}\left(\frac{1-s^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)}-\frac{1-s^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)}\right)
\end{aligned}$$

由于 $1<p<2$, 所以上式右端第一个因子是正的. 又因为 $0<(2k-p)/(p-1)<2k/(p-1)$, 根据引理 1.3.1 知, 上式右端大括号中的项是正的. 因此不等式 (1.3.17) 成立. 证毕.

**引理 1.3.3** 设 $w,z$ 是复数.

(1) 当 $1<p\leqslant 2$ 时,

$$\left|\frac{w+z}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{w-z}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}|w|^p+\frac{1}{2}|z|^p\right)^{1/(p-1)};\qquad(1.3.18)$$

(2) 当 $2 \leqslant p < \infty$ 时，

$$\left|\frac{w+z}{2}\right|^p + \left|\frac{w-z}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|w|^p + \frac{1}{2}|z|^p. \tag{1.3.19}$$

**证明**　当 $w = 0$ 或者 $z = 0$ 时，不等式 (1.3.18) 显然成立．由于不等式 (1.3.18) 关于 $w$ 和 $z$ 是对称的，故可以假定 $|w| \geqslant |z| > 0$．记 $z/w = re^{i\theta}$, $0 < r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi$．那么不等式 (1.3.18) 等价于

$$\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^p\right)^{1/(p-1)}. \tag{1.3.20}$$

若 $\theta = 0$，由引理 1.3.2 知结论成立．如果我们能够证明函数

$$f(\theta) = |1 + re^{i\theta}|^{p'} + |1 - re^{i\theta}|^{p'}$$

在 $\theta = 0$ 处取到最大值，那么不等式 (1.3.20) 成立，进而不等式 (1.3.18) 成立．

把 $f(\theta)$ 写成

$$f(\theta) = (1 + r^2 + 2r\cos\theta)^{p'/2} + (1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{p'/2},$$

显然有 $f(2\pi - \theta) = f(\pi - \theta) = f(\theta)$，所以只要在区间 $[0, \pi/2]$ 上讨论 $f(\theta)$ 即可．注意到 $p' \geqslant 2$，所以在区间 $[0, \pi/2]$ 上有

$$f'(\theta) = -p'r\sin\theta\left[(1+r^2+2r\cos\theta)^{p'/2-1} - (1+r^2-2r\cos\theta)^{p'/2-1}\right] \leqslant 0.$$

因此 $f(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处取到最大值．

下面证明不等式 (1.3.19)．因为 $2 \leqslant p < \infty$，所以 $1 < p' \leqslant 2$．在不等式 (1.3.18) 中交换 $p$ 与 $p'$ 的位置，再利用不等式 (1.2.1) 得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w+z}{2}\right|^p + \left|\frac{w-z}{2}\right|^p &\leqslant \left(\frac{1}{2}|w|^{p'} + \frac{1}{2}|z|^{p'}\right)^{1/(p'-1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}|w|^{p'} + \frac{1}{2}|z|^{p'}\right)^{p-1} \\
&\leqslant 2^{p-2}\left[(1/2)^{p-1}|w|^p + (1/2)^{p-1}|z|^p\right] \\
&= \frac{1}{2}|w|^p + \frac{1}{2}|z|^p,
\end{aligned}$$

即不等式 (1.3.19). 证毕.

**定理 1.3.11 的证明**

(1) 由于 $2 \leqslant p < \infty$, 在不等式 (1.3.19) 中取 $w = u(x)$, $z = v(x)$ 并在 $\Omega$ 上积分, 即得不等式 (1.3.12).

因为 $1 < p' \leqslant 2$, 对于复数 $\xi$ 和 $\eta$, 在不等式 (1.3.18) 中用 $p'$ 代替 $p$, 用 $(\xi+\eta)/2$ 代替 $w$, 用 $(\xi-\eta)/2$ 代替 $z$, 即得

$$\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} \geqslant \frac{1}{2}|\xi|^p+\frac{1}{2}|\eta|^p.$$

注意到对于 $f \in L^p(\Omega)$, 有 $\||f|^{p'}\|_{p-1} = \|f\|_p^{p'}$. 在上面的不等式中取 $\xi = u(x)$, $\eta = v(x)$ 并在 $\Omega$ 上积分, 再利用 $p-1 \geqslant 1$ 和 Minkowski 不等式又得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1} &= \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{1/(p-1)} \\ &\leqslant \left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} \\ &\leqslant \left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} \\ &= \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}.\end{aligned}$$

故不等式 (1.3.13) 成立.

(2) 先证不等式 (1.3.14). 由于 $1 < p \leqslant 2$, 对于复数 $\xi$ 和 $\eta$, 在不等式 (1.3.18) 中取 $w = \xi+\eta$, $z = \xi-\eta$, 并整理得

$$\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^p+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^p \geqslant \left(\frac{1}{2}|\xi|^{p'}+\frac{1}{2}|\eta|^{p'}\right)^{p-1}.$$

在上面这个不等式中取 $\xi = u(x)$, $\eta = v(x)$ 并在 $\Omega$ 上积分. 注意到 $0 < p-1 \leqslant 1$, 再利用逆 Minkowski 不等式又得

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \geqslant \int_\Omega\left(\frac12|u|^{p'}+\frac12|v|^{p'}\right)^{p-1}$$
$$=\left\|\frac12|u|^{p'}+\frac12|v|^{p'}\right\|_{p-1}^{p-1}$$
$$\geqslant\left(\left\|\frac12|u|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\frac12|v|^{p'}\right\|_{p-1}\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac12\|u\|_p^{p'}+\frac12\|v\|_p^{p'}\right)^{p-1}$$
$$\geqslant\frac12\|u\|_p^{p'(p-1)}+\frac12\|v\|_p^{p'(p-1)}$$
$$=\frac12\|u\|_p^p+\frac12\|v\|_p^p,$$

即不等式 (1.3.14).

再证明不等式 (1.3.15). 在不等式 (1.3.18) 中取 $w=u(x), z=v(x)$, 注意到 $0<p-1\leqslant 1$, 利用逆 Minkowski 不等式得

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'}=\left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}+\left\|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\mathrm{d}x\right]^{1/(p-1)}$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega\left(\frac12|u|^p+\frac12|v|^p\right)\mathrm{d}x\right]^{1/(p-1)}$$
$$=\left(\frac12\|u\|_p^p+\frac12\|v\|_p^p\right)^{p'-1}.$$

即不等式 (1.3.15). 定理得证.

设 $X$ 是一个赋范空间, 其范数记为 $\|\cdot\|$. 如果对于任何 $\varepsilon\in(0,2)$ 都存在常数 $\delta(\varepsilon)\in(0,1)$, 当 $x,y\in X$ 并且满足 $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时, 就有 $\|(x+y)/2\|\leqslant 1-\delta(\varepsilon)$, 则称 $X$ 是一致凸的.

**定理 1.3.12** 当 $1<p<\infty$ 时, 空间 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的, 从而是自反的.

**证明** 设 $u,v\in L^p(\Omega)$ 满足 $\|u\|_p=\|v\|_p=1$, 并且 $\|u-v\|_p\geqslant\varepsilon>0$.

如果 $2\leqslant p<\infty$, 由不等式 (1.3.12) 得 $\|(u+v)/2\|_p^p\leqslant 1-(\varepsilon/2)^p$. 如果 $1<p\leqslant 2$, 由不等式 (1.3.15) 得 $\|(u+v)/2\|_p^{p'}\leqslant 1-(\varepsilon/2)^{p'}$. 所以 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的. 在泛函分析中我们已经知道, 一致凸的 Banach 空间是自反的. 因此, 当 $1<p<\infty$ 时, 空间 $L^p(\Omega)$ 是自反的. 证毕.

## 1.4 Hölder 空间

比可微函数性质稍差的函数是 Lipschitz 连续函数 (它是几乎处处可微的), 这种函数是借助于半模

$$[u]_{0,1}=[u]_{0,1;\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}<\infty$$

来刻画的. 记这种函数的全体为 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$, 并赋予范数

$$|u|_{0,1}:=|u|_{0,1;\Omega}=|u|_0+[u]_{0,1},$$

这里 $|u|_0=|u|_{0;\Omega}=\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$ 或者 $|u|_0=|u|_{0;\Omega}=\max\limits_{\overline{\Omega}}|u|$ 被称为 $u$ 在 $\Omega$ 上的最大模. 那么 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ 是一个 Banach 空间. 设 $k\geqslant 1$ 是正整数, 定义

$$C^{k,1}(\overline{\Omega})=\left\{u\in C^k(\overline{\Omega});\ [D^\beta u]_{0,1}<\infty,\ \forall|\beta|=k\right\},$$

并赋予范数

$$|u|_{k,1}=|u|_{k,1;\Omega}=\sum_{|\beta|\leqslant k}|D^\beta u|_0+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{0,1},$$

那么 $C^{k,1}(\overline{\Omega})$ 也是一个 Banach 空间.

设 $k\geqslant 0$ 是整数. 如果对于任意的 $\Omega_0\Subset\Omega$, 都有 $u\in C^{k,1}(\overline{\Omega}_0)$, 则称 $u\in C^{k,1}(\Omega)$, 或者 $u\in C^{k,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

自然要考虑比 Lipschitz 连续函数性质稍差而又十分重要的一类函数——Hölder 连续函数. 它是 Lipschitz 连续函数的自然推广.

**定义 1.4.1** 设 $0<\alpha<1$. 对于 $x_0\in\Omega$, 如果

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ x\neq x_0}}\frac{|u(x)-u(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}<\infty,$$

则称 $u$ 在点 $x_0$ 处是具有指数 $\alpha$ 的 Holder 连续函数.

如果

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty,$$

则称 $u$ 是 $\Omega$ 上具有指数 $\alpha$ 的 Holder 连续函数或整体 Holder 连续函数. 这种函数的全体构成的集合记为 $C^\alpha(\bar{\Omega})$. 数

$$[u]_\alpha=[u]_{\alpha;\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

被称为 $u$ 在 $\Omega$ 上的 Holder 半模 (半范数). 数

$$|u|_\alpha:=|u|_{\alpha,\Omega}=|u|_0+[u]_\alpha$$

被称为 $u$ 在 $\Omega$ 上的 Holder 范数. 易证, $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 赋予范数 $|u|_\alpha$ 后是一个 Banach 空间.

如果对于任意的 $\Omega_0\Subset\Omega$, 都有 $u\in C^\alpha(\bar{\Omega}_0)$, 就称 $u$ 是 $\Omega$ 上具有指数 $\alpha$ 的局部 Hölder 连续函数, 记为 $u\in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 或 $u\in C^\alpha(\Omega)$.

**定义 1.4.2** 假定 $k\geqslant 1$ 是整数, $0<\alpha<1$. 定义

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})=\left\{u\in C^k(\bar{\Omega}) : [D^\beta u]_\alpha<\infty,\ \forall\ |\beta|=k\right\},$$

并赋予范数

$$|u|_{k+\alpha}=|u|_{k+\alpha;\Omega}=\sum_{|\beta|\leqslant k}|D^\beta u|_0+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_\alpha.$$

易证 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间. 类似地可以定义 $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 或者 $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

设 $k \geqslant 1$ 是整数, 通常简记

$$[u]_k := [u]_{k,\Omega} = \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u|_0 = |D^k u|_0,$$

$$[u]_{k+\alpha} := [u]_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_\alpha = [D^k u]_\alpha,$$

它们分别是空间 $C^k(\overline{\Omega})$ 和 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的半模. 简记

$$|u|_k := |u|_{k,\Omega} = \sum_{|\beta|\leqslant k} |D^\beta u|_0,$$

它是空间 $C^k(\overline{\Omega})$ 中的范数.

按照定义, 可直接得到

**定理 1.4.1** 设 $u, v \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

(1) $[uv]_\alpha \leqslant |u|_0[v]_\alpha + [u]_\alpha|v|_0$;

(2) $|uv|_\alpha \leqslant |u|_\alpha|v|_\alpha$.

Hölder 空间最重要的性质是内插不等式, 它使我们做估计时可以集中讨论最关键的部分, 从而简化证明过程.

**定理 1.4.2** 设 $\Omega$ 有界, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 则对于任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 下面的内插不等式成立:

$$[u]_1 \leqslant \varepsilon[u]_{2+\alpha} + C_\varepsilon|u|_0, \tag{1.4.1}$$

$$[u]_2 \leqslant \varepsilon[u]_{2+\alpha} + C_\varepsilon|u|_0, \tag{1.4.2}$$

其中正常数 $C_\varepsilon$ 不仅依赖于 $\varepsilon$, 而且还依赖于空间维数 $n$, 指数 $\alpha$ 和区域 $\Omega$.

**证明** 我们采用紧性方法来证明. 只证不等式 (1.4.1), 不等式 (1.4.2) 的证明类似. 如果结论不对, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $u_m \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 使

$$[u_m]_1 > \varepsilon[u_m]_{2+\alpha} + m|u_m|_0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{1.4.3}$$

用 $v_m = u_m/|u_m|_1$ 代替 $u_m$, 可以假设 $|u_m|_1 = 1$. 从而 $[u_m]_1 \leqslant 1$. 由不等式 (1.4.3) 得

$$[u_m]_{2+\alpha} \leqslant 1/\varepsilon, \quad |u_m|_0 < 1/m. \tag{1.4.4}$$

这说明 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在空间 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 有界. 利用 Arzelà-Ascoli 定理知, 存在子列 $\{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$ 和 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 使得在 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $u_{m_j} \to u$. 再由 $|u_m|_1 = 1$ 知, $|u|_1 = 1$.

另一方面, 根据 (1.4.4) 的第二式又知, 在 $\bar{\Omega}$ 上 $u_m$ 一致收敛于零, 因而 $u \equiv 0$. 这与 $|u_m|_1 = 1$ 相矛盾. 证毕.

下面定义区域 $\Omega$ 的正则性.

**定义 1.4.3** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, $k$ 是非负整数, $0 < \alpha < 1$. 称 $\partial\Omega \in C^k$ ($\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$), 如果对每一点 $x_0 \in \partial\Omega$, 都存在 $r > 0$ 和一个 $C^k$ ($C^{k,\alpha}$) 函数 $\phi: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, 通过改变坐标的顺序, 可以写成

$$\begin{cases} \partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0): x_n = \phi(x')\}, \\ \Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0): x_n > \phi(x')\}, \\ \Omega^c \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0): x_n < \phi(x')\}. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

这里, $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$.

如果对于任意的正整数 $k$, 都有 $\partial\Omega \in C^k$, 就称 $\partial\Omega \in C^\infty$. 如果对每一点 $x_0 \in \partial\Omega$ 对应的函数 $\phi$ 都是 Lipschitz 连续的, 就称 $\Omega$ 具有 Lipschitz 性质或 Lipschitz 边界, 记为 $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

定义

$$\Phi(x) = (x', x_n - \phi(x')), \quad \Psi = \Phi^{-1}. \tag{1.4.6}$$

显然 $\Phi, \Psi$ 与 $\phi$ 有相同的光滑性. 若令 $y = \Phi(x)$, 则 $O = \Phi(\Omega \cap B_r(x_0))$ 是上半空间 $y_n > 0$ 中的一个区域, 它的一部分边界 $\Phi(\partial\Omega \cap B_r(x_0))$ 落在超平面 $y_n = 0$ 上.

显然, 存在一个球 $B$, 其上半球落在区域 $\Phi(\Omega\cap B_r(x_0))$ 中. 通过坐标的平移和拉伸变换, 不妨认为 $B$ 是中心在原点的单位球. 这样, $Q=\Psi(B)$ 就成为 $x$ 空间中的一个区域并且包含 $\partial\Omega$ 的一部分.

这种变换称为边界拉平变换. 处理函数在边界 $\partial\Omega$ 附近的性质时非常有用. 在后面各章节的研究中我们将会看到这一点.

**定义 1.4.4** 称 $\Omega$ 具有锥性质, 也称 $\Omega$ 为锥形区域, 如果存在一个有限锥 $V$ 使得对于任意的 $x\in\partial\Omega$, 都存在以 $x$ 为顶点且与 $V$ 全等的锥 $V_x\subset\Omega$.

如果 $\partial\Omega\in C^{0,1}$, 那么 $\Omega$ 具有锥性质.

**定理 1.4.3** 设 $\Omega$ 具有锥性质, $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. 则对于任意的 $0<\varepsilon<1$, 下面的内插不等式成立.

$$[u]_1\leqslant\varepsilon^{1+\alpha}[u]_{2+\alpha}+C\varepsilon^{-1}|u|_0, \tag{1.4.7}$$

$$[u]_2\leqslant\varepsilon^{\alpha}[u]_{2+\alpha}+C\varepsilon^{-2}|u|_0, \tag{1.4.8}$$

其中正常数 $C$ 仅依赖于空间维数 $n$, 指数 $\alpha$ 和有限锥 $V$ 的立体角.

**证明** 对于有相同立体角、锥高为 1 的锥 $V^1$, 如果 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{V^1})$, 由定理 1.4.2,

$$[u]_{1,V^1}\leqslant[u]_{2+\alpha,V^1}+C|u|_{0,V^1}, \tag{1.4.9}$$

这里的正常数 $C$ 只依赖于 $\alpha$ 和有限锥的立体角. 设 $0<\varepsilon\leqslant h$, 其中 $h$ 是有限锥 $V$ 的锥高. 按照定义, 对于任何 $x_0\in\Omega$, 必存在锥 $V^{\varepsilon}_{x_0}\subset\Omega$, 它以 $x_0$ 为顶点、锥高为 $\varepsilon$ 并且与有限锥 $V$ 有相同的立体角. 因为 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 所以 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{V^{\varepsilon}_{x_0}})$. 作变量代换 $y=(x-x_0)/\varepsilon$ 并令 $\tilde{u}(y)=u(x_0+\varepsilon y)$, 那么 $\tilde{u}\in C^{2,\alpha}(\overline{V^1})$. 对于 $\tilde{u}$, 不等式 (1.4.9) 成立, 再变回到原变量 $x$ 可得

$$[u]_{1,V^{\varepsilon}_{x_0}}\leqslant\varepsilon^{1+\alpha}[u]_{2+\alpha,V^{\varepsilon}_{x_0}}+C\varepsilon^{-1}|u|_{0,V^{\varepsilon}_{x_0}}\leqslant\varepsilon^{1+\alpha}[u]_{2+\alpha,\Omega}+C\varepsilon^{-1}|u|_{0,\Omega}$$

再由 $x_0$ 的任意性知, 不等式 (1.4.7) 成立. 不等式 (1.4.8) 的证明类似. 证毕.

如果区域 $\Omega$ 是一个球, 我们还有更为精细的结果.

**定理 1.4.4** 记 $B_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为球心、以 $r$ 为半径的球, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_r)$, 则对任意的 $0<\rho\leqslant r$, 都有

$$[u]_1 \leqslant \rho^{\alpha}[u]_{1+\alpha} + C(n)\rho^{-1}|u|_0, \tag{1.4.10}$$

$$[u]_\alpha \leqslant \rho[u]_{1+\alpha} + C(n)\rho^{-\alpha}|u|_0. \tag{1.4.11}$$

**证明** 对任意的 $y \in B_r$, 取 $\bar{x} \in B_r$ 使得 $y \in B_{\rho/2}(\bar{x}) \Subset B_r$. 在 $B_{\rho/2}(\bar{x})$ 上对 $D_i u$ 积分得

$$\int_{B_{\rho/2}(\bar{x})} D_i u \mathrm{d}x = \int_{\partial B_{\rho/2}(\bar{x})} u \cos(\nu, x_i) \mathrm{d}S.$$

于是存在 $\bar{y} \in B_{\rho/2}(\bar{x})$, 使得

$$D_i u(\bar{y}) = \frac{1}{|B_{\rho/2}(\bar{x})|}\left|\int_{\partial B_{\rho/2}(\bar{x})} u\cos(\nu, x_i)\mathrm{d}S\right| \leqslant \frac{|\partial B_{\rho/2}(\bar{x})|}{|B_{\rho/2}(\bar{x})|}|u|_0 = \frac{2n}{\rho}|u|_0.$$

又因为

$$\begin{aligned}
|D_i u(y)| &\leqslant |D_i u(y) - D_i u(\bar{y})| + |D_i u(\bar{y})| \\
&\leqslant \frac{|D_i u(y) - D_i u(\bar{y})|}{|y-\bar{y}|^{\alpha}}|y-\bar{y}|^{\alpha} + \frac{2n}{\rho}|u|_0 \\
&\leqslant \rho^{\alpha}[D_i u]_\alpha + 2n\rho^{-1}|u|_0.
\end{aligned}$$

根据 $y$ 的任意性知,

$$[u]_1 \leqslant \rho^{\alpha}[u]_{1+\alpha} + C(n)\rho^{-1}|u|_0.$$

估计式 (1.4.10) 得证.

注意到, 当 $|x-y|<\rho$ 时

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}|x-y|^{1-\alpha} < \rho^{1-\alpha}[u]_1,$$

而当 $|x-y|\geqslant\rho$ 时

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant 2\rho^{-\alpha}|u|_0.$$

所以

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant \rho^{1-\alpha}[u]_1+2\rho^{-\alpha}|u|_0$$

总成立. 再结合式 (1.4.10) 即得估计式 (1.4.11). 证毕.

类似可证

**定理 1.4.5** 设 $B_r$ 同上, $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_r)$. 则对于任意的 $0<\rho\leqslant r$, 我们有

$$\rho^\alpha[u]_\alpha+\rho[u]_1+\rho^{1+\alpha}[u]_{1+\alpha}+\rho^2[u]_2\leqslant \rho^{2+\alpha}[u]_{2+\alpha}+C(n,\alpha)|u|_0.$$

**注 1.4.1** 在上面的内插不等式中取 $\rho$ 的特殊值, 可以得到一些特殊而又常用的内插不等式. 例如, 在式 (1.4.10) 中取 $\rho=\varepsilon^{1/\alpha}r$, $\varepsilon\in(0,1)$, 可得

$$[u]_1\leqslant\varepsilon r^\alpha[u]_{1+\alpha}+\frac{C(n,\alpha)}{\varepsilon^{1/\alpha}}r^{-1}|u|_0.$$

## 1.5 磨光

把一个函数磨光, 是用光滑函数逼近一般可积函数的有效方法. 定义函数

$$\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{C}\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

其中

$$C=\int_{B_1}\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)\mathrm{d}x.$$

显然, $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\mathrm{d}x=1$. 通常称 $\eta$ 为软化子.

对于 $\varepsilon>0$, 定义

$$\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

称 $\eta_\varepsilon$ 为磨光核. 显然,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \mathrm{spt}\{\eta_\varepsilon\} = \overline{B}_\varepsilon.$$

对于 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 定义 $u$ 的磨光函数 $u^\varepsilon$

$$u^\varepsilon(x) = J_\varepsilon u(x) = \eta_\varepsilon * u = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega. \tag{1.5.1}$$

称 $J_\varepsilon$ 为磨光算子. 若记 $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, 那么

$$u^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

**定理 1.5.1 (磨光性质)** *磨光函数 $u^\varepsilon$ 具有下面的性质*

(1) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;

(2) $u^\varepsilon \longrightarrow u$ 几乎处处于 $\Omega$;

(3) 当 $u \in C(\Omega)$ 时, 在 $\Omega$ 的任一紧子集上 $u^\varepsilon$ 一致收敛到 $u$;

(4) 若 $1 \leqslant p < \infty$, $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 那么在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$;

(5) 假设 $u \in L^1(\Omega)$ 并且 $\mathrm{spt}\{u\} \subset \Omega$, 记 $\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{spt}\{u\}, \partial\Omega)$. 则当 $\varepsilon < \delta/4$ 时, 有 $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;

(6) 如果 $u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$, 那么对于任意固定的 $\sigma > 0$, 在空间 $L^p(\mathbb{R}^n_{2\sigma})$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$, 其中 $\mathbb{R}^n_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant \sigma\}$.

**证明** (1) 固定 $x \in \Omega_\varepsilon$ 及 $i \in \{1, \cdots, n\}$. 取 $h$ 适当小, 使得 $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$, 其中 $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$ 是 $x_i$ 方向的单位向量. 则存在开集 $\Omega_0 \Subset \Omega$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} &= \int_\Omega \frac{1}{h}[\eta_\varepsilon(x+he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)]u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{h}[\eta_\varepsilon(x+he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)]u(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为在 $\overline{\Omega}_0$ 上

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\eta_\varepsilon(x+he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)] = D_i\eta_\varepsilon(x-y)$$

一致成立, 所以 $D_i u^\varepsilon$ 存在, 并且

$$D_i u^\varepsilon = \int_{\Omega_0} D_i \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega} D_i \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$$

对于任意多重指标 $\beta$ 同理可证 $D^\beta u^\varepsilon(x)$ 存在, 并且

$$D^\beta u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} D^\beta \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$$

(2) 根据 Lebesgue 微分定理 (定理 A.1), 对几乎所有的 $x \in \Omega$, 有

$$\lim_{r\to 0^+} ⨍_{B_r(x)} |u(y)-u(x)|\mathrm{d}y = 0. \tag{1.5.2}$$

对于这样的点 $x$, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned}|u^\varepsilon(x)-u(x)| &= \left|\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)[u(y)-u(x)]\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|u(y)-u(x)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant C ⨍_{B_\varepsilon(x)} |u(y)-u(x)|\mathrm{d}y \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

(3) 假设 $u \in C(\Omega)$. 对于任意给定的 $\Omega_0 \Subset \Omega$, 取开集 $W$ 使得 $\Omega_0 \Subset W \Subset \Omega$. 因为 $u$ 在 $\overline{W}$ 上一致连续, 所以式 (1.5.2) 关于 $x \in \overline{\Omega}_0$ 一致成立. 因此, $u^\varepsilon \longrightarrow u$ 在 $\overline{\Omega}_0$ 上一致成立.

(4) 假设 $1 \leqslant p < \infty, u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 取 $\Omega_0 \Subset W \Subset \Omega$. 先证当 $\varepsilon > 0$ 适当小时,

$$\|u^\varepsilon\|_{p,\Omega_0} \leqslant \|u\|_{p,W}. \tag{1.5.3}$$

事实上, 对于 $x \in \Omega_0$,

$$\begin{aligned}|u^\varepsilon(x)| &= \left|\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right)^{1-1/p}\left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\end{aligned}$$

因为 $\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=1$, 所以当 $\varepsilon$ 适当小时,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}|u^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\Omega_0}\left(\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_W|u(y)|^p\left(\int_{B_\varepsilon(y)}\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_W|u(y)|^p\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

不等式 (1.5.3) 成立.

固定 $\Omega_0\Subset W\Subset\Omega$, $\delta>0$, 并取 $v\in C(\overline{W})$ 使得 $\|u-v\|_{p,W}<\delta$. 利用式 (1.5.3) 得

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon-u\|_{p,\Omega_0}&\leqslant\|u^\varepsilon-v^\varepsilon\|_{p,\Omega_0}+\|v^\varepsilon-v\|_{p,\Omega_0}+\|v-u\|_{p,\Omega_0}\\&\leqslant2\|v-u\|_{p,W}+\|v^\varepsilon-v\|_{p,\Omega_0}\\&\leqslant2\delta+\|v^\varepsilon-v\|_{p,\Omega_0}.\end{aligned}$$

由于 $v^\varepsilon\longrightarrow v$ 在 $\overline{W}$ 上一致成立, 因此 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\|u^\varepsilon-u\|_{p,\Omega_0}\leqslant2\delta$.

现在证明性质 (5). 设 $\varepsilon<\delta/4$. 由性质 (1) 知 $u^\varepsilon\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. 先证 $u^\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$. 事实上, 按照定义我们有

$$u^\varepsilon(x)=\int_{|x-y|<\varepsilon}\eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y,\quad x\in\Omega_\varepsilon.\tag{1.5.4}$$

假设 $x\in\Omega_\varepsilon$ 并且 $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)<\delta/2$. 对于满足 $|x-y|<\varepsilon$ 的 $y$, 由

$$\mathrm{dist}(y,\partial\Omega)\leqslant|x-y|+\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)<3\delta/4$$

知, $y\notin\mathrm{spt}\{u\}$. 从而由式 (1.5.4) 知, $u^\varepsilon(x)=0$. 这说明 $\mathrm{spt}\{u^\varepsilon\}\subset\Omega_\varepsilon$. 再把 $u^\varepsilon$ 零延拓到 $\Omega$, 那么 $u^\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$.

最后证明性质 (6). 对任给的 $\delta>0$, 因为 $u\in L^p(\mathbb{R}_+^n)$, 故存在 $m\gg1$, 使得

$$\int_{A_m^{(1)}}|u|^p\mathrm{d}x<\delta,\qquad\int_{A_m^{(2)}}|u|^p\mathrm{d}x<\delta.$$

其中, $A_m^{(1)} = \mathbb{R}_\sigma^n \cap \{|x| \geqslant m\}$, $A_m^{(2)} = \mathbb{R}_{2\sigma}^n \cap \{|x| \geqslant 2m\}$. 同于 (4) 的证明可知, 当 $\varepsilon > 0$ 适当小时,

$$\int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{A_m^{(1)}} |u|^p \mathrm{d}x < \delta.$$

由结论 (4) 又知, 在 $L^p(\mathbb{R}_{2\sigma}^n \setminus A_m^{(2)})$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_{2\sigma}^n} |u^\varepsilon - u|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_{2\sigma}^n \setminus A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p \mathrm{d}x + \int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}_{2\sigma}^n \setminus A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p \mathrm{d}x \\
&\quad + 2^{p-1}\left(\int_{A_m^{(2)}} |u^\varepsilon|^p \mathrm{d}x + \int_{A_m^{(2)}} |u|^p \mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant 2^p\delta + \int_{\mathbb{R}_{2\sigma}^n \setminus A_m^{(2)}} |u^\varepsilon - u|^p \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由此得 $\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - u\|_{p,\mathbb{R}_{2\sigma}^n} \leqslant 2\delta^{1/p}$. 证毕.

**注 1.5.1** (1) 如果 $\Omega$ 有界, 把 $L^p(\Omega)$ 中的函数 $u$ 零延拓到 $\Omega$ 的外部后仍记为 $u$. 取一个紧包含 $\Omega$ 的开集 $\Omega_1$, 那么 $u \in L^p(\Omega_1)$. 由定理 1.5.1 的 (1) 知, $u^\varepsilon \in C^\infty(\bar\Omega)$. 再由定理 1.5.1 的 (4) 知, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$.

(2) 从定理 1.5.1 的 (4) 的证明过程可以看出: 如果 $u \in L^p(\Omega)$ 并且 $\mathrm{spt}\{u\} \Subset \Omega$, 那么当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 有 $\|u^\varepsilon\|_{p,\Omega} \leqslant \|u\|_{p,\Omega}$.

**定理 1.5.2** 设 $\Omega$ 非空, 紧集 $K \subset \Omega$, 则存在 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 使得在 $K$ 上 $\phi \equiv 1$.

**证明** 取开集 $U$ 使得 $K \subset U$ 并且 $\bar U \subset \Omega$. 令 $\chi_U$ 为集合 $U$ 的特征函数,

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\min\left\{\mathrm{dist}(K,\partial U), \mathrm{dist}(U,\partial\Omega)\right\}.$$

容易验证函数

$$\phi(x) = \chi_U^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y)\chi_U(x-y)\mathrm{d}y$$

满足定理的要求. 证毕.

## 1.6　空间 $L^p(\Omega)$ 的紧性

在 1.3.4 节我们已经知道，当 $1 < p < \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间. 因此，$L^p(\Omega)$ 中的集合 $K$ 是准弱紧 (弱紧) 的当且仅当 $K$ 是有界的 (有界弱闭的). 下面，我们讨论空间 $L^p(\Omega)$ 的紧性 (强紧性).

在泛函分析中我们已经知道，Banach 空间中的准紧集一定是有界的. 因此，我们只讨论 $L^p(\Omega)$ 中的有界集. 约定: 把 $L^p(\Omega)$ 中的函数零延拓到 $\Omega$ 的外部之后，仍记为它自身.

**定理 1.6.1**　*假设 $1 \leqslant p < \infty$，那么有界集 $K \subset L^p(\Omega)$ 是准紧的当且仅当*

*(1) 集合 $K$ 是一致整体连续的，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|h| < \delta$ 时，有*

$$\int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \quad \forall\, u \in K, \tag{1.6.1}$$

*(2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在闭子集 $G \Subset \Omega$，使得*

$$\int_{\Omega \setminus G} |u|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \quad \forall\, u \in K. \tag{1.6.2}$$

**证明**　只要对 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 的特殊情形证明本定理即可. 这是因为，若把 $L^p(\Omega)$ 中的函数零延拓到 $\Omega$ 的外部，那么 $L^p(\Omega)$ 可以看成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的子空间，$K$ 也可以看成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的有界集.

*第一步*　*证明必要性.* 假设集合 $K$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是准紧的，那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，集合 $K$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有一个有限 $\varepsilon/6$-网 (定理 A.8). 又因为 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 (定理 1.3.9)，所以存在有限集 $S \subset C_0(\mathbb{R}^n)$，使得对于每个 $u \in K$，都存在 $\phi_u \in S$ 满足 $\|u - \phi_u\|_{p,\mathbb{R}^n} < \varepsilon/3$. 由于 $S$ 是有限集，故存在 $R > 0$，使得

$$\operatorname{spt}\{\phi\} \subset \overline{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant R\}, \quad \forall\, \phi \in S.$$

取 $G=\overline{B}_R$, 就得到不等式 (1.6.2). 此外, 对于任何固定的 $\phi\in S$ 和 $h\in\mathbb{R}^n$, 函数 $f(x)=\phi(x+h)-\phi(x)$ 一致连续, 并且当 $|h|<1$ 时, 在 $\overline{B}_{R+1}$ 的外部 $f(x)=0$. 因为 $S$ 是有限集, 所以

$$\lim_{|h|\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(x+h)-\phi(x)|^p\mathrm{d}x=0 \tag{1.6.3}$$

关于 $\phi\in S$ 一致成立.

记 $u^h(x)=u(x+h)$. 对于 $u\in K$, 若 $\phi\in S$ 满足 $\|u-\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}<\varepsilon/3$, 则 $\|u^h-\phi^h\|_{p,\mathbb{R}^n}<\varepsilon/3$. 由极限 (1.6.3) 知, 当 $|h|$ 适当小时,

$$\|u^h-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\|u^h-\phi_u^h\|_{p,\mathbb{R}^n}+\|\phi_u^h-\phi_u\|_{p,\mathbb{R}^n}+\|u-\phi_u\|_{p,\mathbb{R}^n}<\varepsilon,\ \forall\, u\in K$$

因此, 不等式 (1.6.1) 成立.

**第二步 证明充分性.** 给定 $\varepsilon>0$, 选取闭集 $G\Subset\mathbb{R}^n$, 使得不等式 (1.6.2) 成立. 对于任意的 $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 以及任意的常数 $\sigma>0$, 由式 (1.5.1) 定义的 $J_\sigma u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 当然有 $J_\sigma u\in C^\infty(G)$.

我们把证明分解成几个引理.

**引理 1.6.1** 假设定理 1.6.1 的条件 (1) 和 (2) 成立. 那么

$$\lim_{\sigma\to 0}\|J_\sigma u-u\|_{p,\mathbb{R}^n}=0\quad \text{关于 } u\in K \text{ 一致成立.} \tag{1.6.4}$$

**证明** 对于给定的 $\tau>0$, 由条件 (1) 知, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|h|<\delta$ 时,

$$\|u^h-u\|_{p,\mathbb{R}^n}<\tau,\quad \forall\, u\in K$$

因此, 当 $\sigma<\delta$ 时,

$$\sup_{h\in B_\sigma}\|u^h-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\tau,\quad \forall\, u\in K. \tag{1.6.5}$$

对于 $\phi\in C_0(\mathbb{R}^n)$, 利用 Holder 不等式知

$$\begin{aligned}|J_\sigma\phi(x)-\phi(x)|^p&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\sigma(y)[\phi(x-y)-\phi(x)]\mathrm{d}y\right|^p\\&\leqslant\int_{B_\sigma}\eta_\sigma(y)|\phi^{-y}(x)-\phi(x)|^p\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由此得

$$\|J_\sigma\phi-\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\sup_{h\in B_\sigma}\|\phi^h-\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}. \tag{1.6.6}$$

对于任意给定的 $u\in K$，由定理 1.3.9，存在 $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset C_0(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\to 0$。同于不等式 (1.5.3) 的证明可证

$$\|J_\sigma\phi_j-J_\sigma u\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

再利用不等式 (1.6.6) 得

$$\begin{aligned}\|J_\sigma u-u\|_{p,\mathbb{R}^n}&\leqslant\|J_\sigma u-J_\sigma\phi_j+J_\sigma\phi_j-\phi_j+\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\\&\leqslant 2\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}+\sup_{h\in B_\sigma}\|\phi_j^h-\phi_j\|_{p,\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\|\phi_j^h-\phi_j\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\|\phi_j^h-u^h\|_{p,\mathbb{R}^n}+\|u^h-u\|_{p,\mathbb{R}^n}+\|u-\phi_j\|_{p,\mathbb{R}^n},\\&\|\phi_j^h-u^h\|_{p,\mathbb{R}^n}^p=\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_j(x+h)-u(x+h)|^p\mathrm{d}x\\&\qquad\qquad\qquad=\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}^p,\end{aligned}$$

所以

$$\|J_\sigma u-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant 4\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}+\sup_{h\in B_\sigma}\|u^h-u\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

由于 $\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}\to 0$，故存在充分大的 $j_0$，使得当 $j\geqslant j_0$ 时，$\|\phi_j-u\|_{p,\mathbb{R}^n}<\tau$。再由式 (1.6.5) 知，当 $\sigma<\delta$ 时 $\|J_\sigma u-u\|_{p,\mathbb{R}^n}<5\tau$。因为 $\delta$ 的选取与 $u$ 无关，所以事实 (1.6.4) 成立。证毕

**引理 1.6.2** *假设定理 1.6.1 的条件 (1) 和 (2) 成立，那么函数集 $\{J_\sigma u: u\in K\}$ 在 $\bar{G}$ 上满足 Arzelà-Ascoli 定理 (定理 A.5) 的条件，从而是 $C(\bar{G})$ 中的准紧集。*

**证明** 根据事实 (1.6.4) 固定 $\sigma>0$ 充分小，则有

$$\int_G|J_\sigma u-u|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon^p}{3\times 2^{p-1}},\quad\forall\, u\in K. \tag{1.6.7}$$

利用 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
|J_\sigma u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x-y)u(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x-y)\mathrm{d}y\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x)\right)^{1/p} \|u\|_{p,\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}
$$

因为 $\sigma$ 是固定的, 所以 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x)$ 有界. 又因为 $K$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的有界集, 故 $J_\sigma u(x)$ 关于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $u\in K$ 一致有界. 类似地可以得到

$$
|(J_\sigma u)(x+h) - J_\sigma u(x)| \leqslant \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \eta_\sigma(x)\right)^{1/p} \|u^h - u\|_{p,\mathbb{R}^n}.
$$

由于 $\sigma$ 是固定的, 由条件 (1) 和上面的不等式便可推知, 函数集 $\{J_\sigma u : u\in K\}$ 等度连续. 因此, 集合 $\{J_\sigma u|_G : u\in K\}$ 是 $C(G)$ 中的准紧集. 证毕.

**继续定理 1.6.1 的充分性证明** 由引理 1.6.2, 集合 $\{J_\sigma u|_G : u\in K\}$ 是 $C(G)$ 中的准紧集, 故对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 它在 $C(G)$ 中有一个有限 $\varepsilon$-网.

选取 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m\in C(G)$, 使得对每个 $u\in K$, 存在一个 $j$ $(1\leqslant j\leqslant m)$, 满足

$$
\max_G |\varphi_j(x) - J_\sigma u(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{3\times 2^{p-1}|G|}. \tag{1.6.8}
$$

把 $\varphi_j$ 零延拓到 $G$ 的外部之后记为 $\tilde{\varphi}_j$, 那么 $\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_m\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 选取 (1.6.2) 式中的 $\varepsilon^p$ 为 $\varepsilon^p/3$. 从式 (1.6.2)、式 (1.6.7) 及式 (1.6.8) 推得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u-\tilde{\varphi}_j|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus G} |u|^p \mathrm{d}x + \int_G |u-\tilde{\varphi}_j|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\varepsilon^p}{3} + 2^{p-1}\int_G (|u-J_\sigma u|^p + |J_\sigma u-\tilde{\varphi}_j|^p)\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon^p}{3} + 2^{p-1}\left(\frac{\varepsilon^p}{3\times 2^{p-1}} + \frac{\varepsilon^p}{3\times 2^{p-1}|G|}|G|\right) \\ &= \varepsilon^p.\end{aligned}$$

这说明，$\{\tilde{\varphi}_1, \cdots, \tilde{\varphi}_m\}$ 是 $K$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的一个有限 $\varepsilon$-网，因而 $K$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是准紧的 (定理 A.8). 定理 1.6.1 得证.

**定理 1.6.2**　*假定 $1 \leqslant p < \infty$，集合 $K \subset L^p(\Omega)$. 又设存在一个具有下列性质的 $\Omega$ 的开子集序列 $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$:*

*(1) 对每个 $m$，$K$ 中的函数限制在 $\Omega_m$ 上构成的集合是 $L^p(\Omega_m)$ 中的准紧集，*

*(2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $m$，使得*

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_m} |u|^p \mathrm{d}x < \varepsilon, \quad \forall\, u \in K.$$

*那么 $K$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的准紧集.*

**证明**　假设 $\{u_j\}$ 是 $K$ 中的一个序列. 根据条件 (1)，存在 $\{u_j\}$ 的子列 $\{u_j^{(1)}\}$，它在 $\Omega_1$ 上的限制 $\{u_j^{(1)}|_{\Omega_1}\}$ 在 $L^p(\Omega_1)$ 中收敛. 同理，存在 $\{u_j^{(1)}\}$ 的子序列 $\{u_j^{(2)}\}$，它在 $\Omega_2$ 上的限制 $\{u_j^{(2)}|_{\Omega_2}\}$ 在 $L^p(\Omega_2)$ 中收敛. 一旦 $\{u_j^{(1)}\}, \{u_j^{(2)}\}, \cdots, \{u_j^{(i)}\}$ 取定之后，可以取 $\{u_j^{(i)}\}$ 的子序列 $\{u_j^{(i+1)}\}$，它在 $\Omega_{i+1}$ 上的限制$\{u_j^{(i+1)}|_{\Omega_{i+1}}\}$ 在 $L^p(\Omega_{i+1})$ 中收敛.

记 $v_j = u_j^{(j)}$，$j = 1, 2, \cdots$，那么 $\{v_j\}$ 是 $\{u_j\}$ 的一个子列. 由条件 (2) 知，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $m$，使得

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_m} |v_i - v_j|^p \mathrm{d}x < \varepsilon/2, \quad \forall\, i, j = 1, 2, \cdots. \tag{1.6.9}$$

因为当 $j \geqslant m$ 时，$v_j \in \{u_j^{(m)}\}$，所以 $\{v_j|_{\Omega_m}\}$ 是 $L^p(\Omega_m)$ 中的一个

Cauchy 列. 于是当 $i, j$ 适当大时,

$$\int_{\Omega_m} |v_i - v_j|^p \mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

该式结合 (1.6.9) 式说明, $\{v_j\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列, 故在 $L^p(\Omega)$ 中收敛. 因此 $K$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的准紧集. 证毕.

## 1.7 截断与分解

研究函数性质 (尤其是偏微分方程的解) 的一个重要方法是把问题局部化, 即在一点的邻域内来讨论. 截断函数是把问题局部化的一个重要手段, 它既能有效地保留原问题的局部性质, 又能避免邻域外各种因素的影响.

若 $\partial\Omega$ 适当光滑, $\Omega_0 \Subset \Omega$. 记 $d = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$. 用 $\chi_{\Omega_{3d}}(x)$ 表示集合 $\Omega_{3d}$ 的特征函数. 并考虑 $\chi_{\Omega_{3d}}(x)$ 的磨光函数

$$\zeta(x) = J_d(\chi_{\Omega_{3d}}(x)).$$

易见, 并且在 $\Omega_0$ 内 $\zeta(x) \equiv 1$,

$$\zeta \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad |D\zeta| \leqslant C/d,$$

其中常数 $C$ 仅依赖于 $\Omega$. 如无特别说明, 总认为在 $\Omega$ 外 $\zeta \equiv 0$. 具有上述性质的函数 $\zeta$ 称为 $\Omega$ 上相对于子集 $\Omega_0$ 的截断函数 (截断因子). 对于定义在 $\Omega$ 内的函数 $u$, 若用 $\zeta u$ 代替 $u$, 那么在 $\Omega_0$ 上 $\zeta u = u$, 在 $\partial\Omega$ 附近以及 $\Omega$ 的外部 $\zeta u = 0$.

最常用的是球的情形 $\Omega = B_R(x_0)$. 设 $0 < \rho < R$, $\zeta$ 是 $B_R(x_0)$ 上按上述方式得到的相对于 $B_\rho(x_0)$ 的截断函数. 那么, $\zeta$ 除了具有上述性质外, 还有

$$|D^\beta \zeta|_0 \leqslant \frac{C}{(R-\rho)^{|\beta|}}, \quad [D^\beta \zeta]_\alpha \leqslant \frac{C}{(R-\rho)^{\alpha+|\beta|}}$$

对任意的多重指标 $\beta$ 和任意 $\alpha \in (0, 1)$ 都成立, 其中 $C$ 是与 $R$ 和 $\rho$ 无关的绝对常数.

把问题局部化以后，往往还需要把局部结果整合而得到整体结果．单位分解就是整合局部到整体的一个重要方法．下面的三个定理都称为单位分解定理．

**定理 1.7.1** *假设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $U_1,\cdots,U_m$ 是 $\Omega$ 的一个开覆盖, 那么存在 $\zeta_i \in C_0^\infty(U_i)$, 使得*

*(1) $0 \leqslant \zeta_i(x) \leqslant 1,\ \forall x \in U_i,\ i=1,\cdots,m$;*

*(2) $\sum_{i=1}^m \zeta_i(x) = 1,\ \forall x \in \Omega$.*

*称 $\zeta_1,\cdots,\zeta_m$ 为 $\Omega$ 的从属于开覆盖 $U_1,\cdots,U_m$ 的一个有限 $C^\infty$-单位分解.*

**证明** 因为开集 $U_1$ 覆盖闭集 $\Omega \setminus \bigcup_{i=2}^m U_i$, 所以

$$\delta_1 = \operatorname{dist}\Big(\partial U_1, \Omega \setminus \bigcup_{i=2}^m U_i\Big) > 0.$$

把 $U_1$ 缩小为

$$U_1^* =: \{x \in U_1 : \operatorname{dist}(x, \partial U_1) > \delta_1/2\},$$

$U_1^*, U_2, \cdots, U_m$ 仍然构成 $\Omega$ 的开覆盖. 类似地, 逐个缩小 $U_2,\cdots,U_m$ 为 $U_2^*,\cdots,U_m^*$. 那么 $U_1^*, U_2^*,\cdots,U_m^*$ 还构成 $\Omega$ 的开覆盖.

由定理 1.5.2 知, 存在 $\phi_i \in C_0^\infty(U_i)$, 在 $\overline{U_i^*}$ 上 $\phi_i = 1$. 记 $\phi(x) = \sum_{i=1}^m \phi_i(x)$, 那么

$$\zeta_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)},\quad i=1,\cdots,m$$

即为所要的单位分解. 证毕.

**定理 1.7.2** *设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, $\mathscr{U}$ 是 $\Omega$ 的一个开覆盖, 即 $\mathscr{U}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 中的一组开集构成的开集族, 并且 $\Omega \subset \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$. 那么存在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的一个函数族 $\sum$ (至多是可数集), 具有下列性质:*

*(1) 对于任意的 $\zeta \in \sum$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$;*

*(2) 对每个 $\zeta \in \sum$, 都存在 $U \in \mathscr{U}$, 使得 $\operatorname{spt}\{\zeta\} \subset U$;*

(3) $\sum_{\zeta\in\sum}^{\infty}\zeta(x)=1,\ \forall x\in\Omega$;

(4) 对 $\Omega$ 的任意紧子集 $\Omega'$ 函数族 $\sum$ 中至多有有限多个 $\zeta$ 在 $\Omega'$ 上不恒为零.

称函数族 $\sum$ 为 $\Omega$ 的从属于开覆盖 $\mathscr{U}$ 的一个 $C^\infty$ 单位分解.

**证明** 先考虑 $\Omega$ 是紧集的情况. 利用有限覆盖定理知, 存在 $U_1,\cdots,U_k\in\mathscr{U}$ 使得 $\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_i$, 由定理 1.7.1 知结论成立.

再考虑 $\Omega$ 是开集的情况. 对于集合 $A$, 分别用 $A^\circ$ 和 $A^c$ 表示 $A$ 的内部和余集. 对于正整数 $k$, 定义

$$A_k=\{x\in\Omega: |x|\leqslant k,\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geqslant 1/k\},\quad \Omega_k=A_k\setminus A_{k-1}^\circ,$$

式中 $A_0=\varnothing$. 这里, 开始的几个 $\Omega_k$ 可能是空集, 但是不影响讨论. 显然 $\Omega_k$ 是紧集并且 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$. 定义开集族

$$\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2=\{U\cap A_3^\circ: U\in\mathscr{U}\},$$

$$\mathscr{V}_k=\{U\cap A_{k+1}^\circ\cap A_{k-2}^c: U\in\mathscr{U}\},\quad k\geqslant 3.$$

那么 $\mathscr{V}_k$ 是紧集 $\Omega_k$ 的开覆盖. 利用上一步的结论知, 存在 $\Omega_k$ 的一个从属于开覆盖 $\mathscr{V}_k$ 的有限 $C^\infty$-单位分解 $\sum_k$. 显然, 对于 $\Omega$ 的任意紧子集 $\Omega'$ 只能存在有限多个 $k$, 使得 $\Omega'$ 与 $\mathscr{V}_k$ 中的元素(集合)相交. 又因为 $\sum_k$ 是有限单位分解, 所以在每一点 $x\in\Omega$ 处, 和式 $\sigma(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\phi\in\Sigma_k}\phi(x)$ 只包含有限多个非零项, 而且对于任何 $x\in\Omega$, 有 $\sigma(x)>0$. 容易验证, 函数族

$$\sum=\left\{\frac{\phi(x)}{\sigma(x)}: \phi\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\Sigma_k\right\}$$

具有定理的 4 个性质. 注意到 $\sum_k$ 是有限集, 故 $\sum$ 至多是可数集.

最后考虑 $\Omega$ 是任意集合的情况. 由于 $\Omega\subset B=\bigcup_{U\in\mathscr{U}}U$, 而 $B$ 是开集, 所以对 $B$ 做出的单位分解同样也是对 $\Omega$ 做出的单位分解. 证毕.

**定理 1.7.3** 假设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的集合, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\Omega$ 的一个开覆盖, 那么存在 $\zeta_i\in C_0^\infty(U_i)$, 使得

(1) $0\leqslant\zeta_i(x)\leqslant 1,\ \forall x\in U_i,\ i=1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i(x)=1,\ \forall x\in\Omega$;

(3) 对任意的 $x_0\in\Omega$, 存在 $x_0$ 的一个邻域 $B_\varepsilon(x_0)$, 使得 $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中只有有限个 $\zeta_i$ 在 $B_\varepsilon(x_0)$ 中不恒为零.

称 $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\Omega$ 的从属于开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的一个 $C^\infty$ 单位分解.

**证明** 取 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由定理 1.7.2 得到的 $\Omega$ 的从属于开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 $C^\infty$-单位分解. 当 $\psi_k\neq 0$ 时, 由 $\mathrm{spt}\{\psi_k\}\subset U_{i_k}$ 确定了一个多值映射

$$f:k\longrightarrow i_k.$$

对于任意的 $i$, 定义

$$\zeta_i(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{f(k)=i}\psi_k(x), & \text{若存在 } k \text{ 使得 } f(k)=i,\\ 0, & \text{若不存在 } k \text{ 使得 } f(k)=i.\end{cases}$$

从定理 1.7.2 的证明可以看出, 对于任意的 $x\in\Omega$, 和式 $\sum_{f(k)=i}\psi_k(x)$ 中只包含有限多个非零项. 因此, $\zeta_i(x)$ 有定义. 容易验证 $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足所要的条件. 证毕.

这里强调一下上面的 3 个单位分解定理的差别. 在第一个定理中, 因为 $\Omega$ 是紧集, 所以是有限覆盖, 分解也是有限单位分解. 在第二个定理中, 单位分解中的函数与覆盖中的开集之间没有明确的对应关系, 因而不方便应用, 第三个定理克服了这一缺陷.

## 1.8 弱导数

弱导数是分析学中的一个重要概念, 也是研究偏微分方程弱解的基础, 它是古典导数的一个自然推广.

设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集. 给定 $u\in C^1(\Omega)$, 对于任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 我们知道

$$\int_\Omega uD_i\phi dx=-\int_\Omega D_iu\phi dx,\quad i=1,\ldots,n.$$

一般而言，设 $k$ 是正整数 $u \in C^k(\Omega)$，$\alpha$ 是满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标. 对于任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\phi \mathrm{d}x$$

这就启发我们给出下面的定义.

**定义 1.8.1** 设 $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$，$\alpha$ 是多重指标. 称 $v$ 是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数，记为 $v = D^\alpha u$，如果

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

有时又称在弱的意义下 $v = D^\alpha u$.

假设 $k$ 是一个正整数. 如果对于任何长度不超过 $k$ 的多重指标 $\alpha$，$u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数都存在，则称 $u$ 有 $k$ 阶弱导数.

容易证明，当 $u$ 的 $\alpha$ 阶古典导数存在时，它的 $\alpha$ 阶弱导数也存在，并且与古典导数相同. 以后，我们所写的 $D^\alpha u$，都是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数.

**定理 1.8.1 (弱导数的唯一性)** 如果 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数存在，那么在零测集的意义下一定唯一.

**证明** 假设 $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ 都是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数，那么

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \tilde{v}\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

于是

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

由此知，$v = \tilde{v}$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立. 证毕

**例 1.8.1** 设 $n = 1, \Omega = (0, 2)$，考察函数

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

定义

$$v(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & 1\leqslant x<2\end{cases}$$

那么, 在弱的意义下 $u'=v$. 事实上, 对于任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^2 u\phi'\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\phi'\mathrm{d}x+\int_1^2\phi'\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1\phi\mathrm{d}x+\phi(1)-\phi(1)=-\int_0^2 v\phi\mathrm{d}x\end{aligned}$$

**例 1.8.2** 设 $n=1,\Omega=(0,2)$, 函数

$$u(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

那么, 在弱的意义下 $u'$ 不存在. 反证. 如果存在 $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 使得

$$\int_0^2 u\phi'\mathrm{d}x=-\int_0^2 v\phi\mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$

那么

$$\begin{aligned}-\int_0^2 v\phi\mathrm{d}x &= \int_0^2 u\phi'\mathrm{d}x=\int_0^1 x\phi'\mathrm{d}x+2\int_1^2\phi'\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1\phi\mathrm{d}x-\phi(1).\end{aligned}\tag{1.8.1}$$

取一个在 $\Omega$ 内有紧支集且满足

$$0\leqslant\phi_m\leqslant 1,\ \ \phi_m(1)=1,\ \ \phi_m(x)\longrightarrow 0,\ \ \forall\,x\neq 1$$

的光滑函数列 $\{\phi_m\}$. 在式 (1.8.1) 中用 $\phi_m$ 代替 $\phi$, 并令 $m\to+\infty$ 得

$$1=\lim_{m\to+\infty}\phi_m(1)=\lim_{m\to+\infty}\left(\int_0^2 v\phi_m\mathrm{d}x-\int_0^1\phi_m\mathrm{d}x\right)=0,$$

这是一个矛盾. 证毕

**定理 1.8.2** 设 $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$. 又设存在函数列 $\{u_j\}$ 满足 $u_j, Du_j \in L^p(\Omega)$ 以及

(1) 对任何 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有 $\lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega u_j\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega u\phi \mathrm{d}x$;

(2) 存在正常数 $C$, 使得 $\|Du_j\|_{p,\Omega} \leqslant C, \forall j$,

那么 $u$ 在 $\Omega$ 内存在一阶弱导数 $Du$, 并且 $Du \in L^p(\Omega)$, $\|Du\|_{p,\Omega} \leqslant C$.

**证明** 由 (2) 知, 存在 $\{Du_j\}$ 的子列, 仍记为它自身, 以及 $v \in L^p(\Omega)$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_j \rightharpoonup v$, 并且 $\|v\|_{p,\Omega} \leqslant C$. 当然, 对于任何 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \phi Du_j \mathrm{d}x = \int_\Omega \phi v \mathrm{d}x.$$

由弱导数的定义又知,

$$\int_\Omega \phi Du_j \mathrm{d}x = -\int_\Omega u_j D\phi \mathrm{d}x.$$

利用上面的两个等式以及条件 (1) 可得

$$\int_\Omega \phi v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u D\phi \mathrm{d}x.$$

故 $v = Du \in L^p(\Omega)$, 并且 $\|Du\|_{p,\Omega} \leqslant C$. 证毕.

**定理 1.8.3** 设 $\alpha$ 和 $\beta$ 是两个多重指标. 如果 $D^{\alpha+\beta}u$ 存在, 那么 $D^\beta(D^\alpha u)$ 和 $D^\alpha(D^\beta u)$ 存在, 并且

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u.$$

**证明** 对于任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 显然有 $D^\beta\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^{\alpha+\beta}\phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\phi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故 $D^\beta(D^\alpha u)$ 存在并且等于 $D^{\alpha+\beta}u$. 证毕.

**定理 1.8.4**　假设 $u$ 具有 $k$ 阶弱导数，$\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$，那么函数 $\zeta u$ 也有 $k$ 阶弱导数，并且对于任何长度不超过 $k$ 的多重指标 $\alpha$，Leibniz 公式

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \tag{1.8.2}$$

成立，其中 $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

**证明**　用归纳法. 当 $|\alpha| = 1$ 时，对于任意 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta u D^\alpha \phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(u D^\alpha(\zeta\phi) - u\phi D^\alpha \zeta\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\phi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta$.

设 $l < k$ 并且定理的结论对所有满足 $|\alpha| \leqslant l$ 的多重指标 $\alpha$ 及函数 $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立. 取多重指标 $\alpha$，满足 $|\alpha| = l+1$. 则存在多重指标 $\beta$ 和 $\gamma$，满足

$$|\beta| = l, \quad |\gamma| = 1, \quad \alpha = \beta + \gamma.$$

于是，对任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，由归纳假设得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta u D^\alpha \phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega \zeta u D^\beta (D^\gamma \phi)\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_\Omega \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u)\phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left[D^\rho \zeta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u\right]\phi \mathrm{d}x\end{aligned}$$

这里 $\rho = \sigma + \gamma$. 利用

$$\binom{\beta}{\sigma-\gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma},$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\rho}\zeta D^{\alpha-\rho}u+\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\\
=&\sum_{\gamma\leqslant\rho\leqslant\alpha}\binom{\beta}{\rho-\gamma}D^{\rho}\zeta D^{\alpha-\rho}u+\zeta D^{\alpha}u+\sum_{\gamma\leqslant\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\\
=&\sum_{\gamma\leqslant\rho\leqslant\beta}\binom{\beta}{\rho-\gamma}D^{\rho}\zeta D^{\alpha-\rho}u+uD^{\alpha}\zeta+\zeta D^{\alpha}u+\sum_{\gamma\leqslant\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\\
=&\,uD^{\alpha}\zeta+\zeta D^{\alpha}u+\sum_{\gamma\leqslant\sigma\leqslant\beta}\left[\binom{\beta}{\sigma-\gamma}+\binom{\beta}{\sigma}\right]D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\\
=&\,\zeta D^{\alpha}u+uD^{\alpha}\zeta+\sum_{\gamma\leqslant\sigma\leqslant\beta}\binom{\alpha}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\\
=&\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int_{\Omega}\zeta uD^{\alpha}\phi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\phi\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^{\sigma}\zeta D^{\alpha-\sigma}u\,\mathrm{d}x
$$

定理得证

## 习题

在本章的习题中，除非特别声明我们总假设 $\partial\Omega$ 适当光滑

**1.1** 证明带 $\varepsilon$ 的 Young 不等式 (1.2.2)

**1.2** 设 $k$ 是非负整数，$0<\alpha\leqslant 1$．证明 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间

**1.3** 对于开集 $U\Subset\Omega$，证明存在光滑函数 $\zeta$，使得在 $U$ 上 $\zeta=1$，在 $\partial\Omega$ 附近 $\zeta=0$ (提示：取一个开集 $V$，使得 $U\Subset V\Subset\Omega$，把函数 $\chi_V$ 磨光)

**1.4** 假设 $0<\alpha<\beta<1$，$u\in C^{0,1}(\overline{\Omega})$．证明内插不等式

$$
|u|_{\beta}\leqslant|u|_{\alpha}^{(1-\beta)/(1-\alpha)}|u|_{0,1}^{(\beta-\alpha)/(1-\alpha)}.
$$

**1.5** 证明定理 1.4.1

**1.6** 设 $\Omega$ 是包含原点的区域, $k$ 是正整数, $\alpha$ 是实数. 试证明 当 $k+\alpha<n$ 时对于任意长度不超过 $k$ 的多重指标 $\beta$, 函数 $|x|^{\alpha}$ 在 $\Omega$ 内有 $\beta$ 阶弱导数

**1.7** 设 $\Omega$ 是一个区域. 证明 $u\in C^{0,1}(\Omega)$ 当且仅当 $u$ 在 $\Omega$ 内有一阶弱导数并且一阶弱导数是局部有界的

# 第二章　各向同性的整指数 Sobolev 空间

本章系统介绍各向同性的整指数 (整数阶) Sobolev 空间的基本理论, 它是 Sobolev 空间理论的最基本部分. 学完本章, 读者就可以了解该理论的基本思想和方法. 为了便于讲授和学习, 在不影响其基本思想的前提下, 我们只对 "适当好" 的开集 (边界有适当的光滑性, 有时还要求是有界的, 甚至要求是有界区域) 的情况, 给出每个定理的严格证明. 对于一般情况以及嵌入定理的反例, 单独作为一节 (2.13 节), 只列出主要结果而省略了证明过程.

## 2.1　定义和初等性质

一个没有古典导数的函数可能有弱导数, 甚至其弱导数还会具有某种可积性. 具有弱导数并且其弱导数还有某种可积性的函数, 是整指数 Sobolev 空间的基本元素. 微分方程的弱解, 就是弱导数存在且有某种可积性的解, 也是某个 Sobolev 空间中的元素.

如无特别说明, 本节总假设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k$ 是正整数.

为了书写简便，我们先给一个记号上的约定．对于正整数 $m$ 和 $1\leqslant p<\infty$，记 $D^m u=\{D^\beta u:|\beta|=m\}$，

$$|D^m u|=\left(\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u|^2\right)^{1/2},\quad \|D^m u\|_{p,\Omega}=\left(\sum_{|\beta|=m}\int_\Omega |D^\beta u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

**定义 2.1.1**　定义

$$W_p^k(\Omega)=\{u:\forall|\beta|\leqslant k, D^\beta u \text{ 存在并且属于 } L^p(\Omega)\},$$

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\begin{cases}\left(\sum_{m\leqslant k}\|D^m u\|_{p,\Omega}^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sum_{m\leqslant k}\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |D^m u|, & p=\infty.\end{cases}$$

易证，$\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ 是 $W_p^k(\Omega)$ 上的范数．通常简记 $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}=\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$．当 $\Omega$ 固定时，又简记 $\|\cdot\|_{k,p}=\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$．

当 $p=2$ 时，记 $W_2^k(\Omega)=H^k(\Omega)$．

**定理 2.1.1**　赋予范数 $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ 的空间 $W_p^k(\Omega)$ 是一个 Banach 空间．

**证明**　只证完备性．设 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $W_p^k(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列．对于任何满足 $|\beta|\leqslant k$ 的多重指标 $\beta$，序列 $\{D^\beta u_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列．于是存在函数 $u,u_\beta\in L^p(\Omega)$，使得在 $L^p(\Omega)$ 中

$$u_m\longrightarrow u,\quad D^\beta u_m\longrightarrow u_\beta.$$

因此，对于任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\begin{aligned}\int_\Omega uD^\beta\phi\mathrm{d}x&=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega u_m D^\beta\phi\mathrm{d}x\\&=\lim_{m\to\infty}(-1)^{|\beta|}\int_\Omega \phi D^\beta u_m\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\beta|}\int_\Omega u_\beta\phi\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $D^\beta u = u_\beta \in L^p(\Omega)$. 从而 $u \in W_p^k(\Omega)$, 并且在 $L^p(\Omega)$ 中 $D^\beta u_m \longrightarrow D^\beta u$. 因此, 在 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u$. 证毕.

若在 $H^k(\Omega)$ 中定义

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v}\,dx, \quad u,v \in H^k(\Omega),$$

那么 $(u,v)_{H^k(\Omega)}$ 是空间 $H^k(\Omega)$ 中的内积, $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ 是由内积 $(u,v)_{H^k(\Omega)}$ 导出的范数, $H^k(\Omega)$ 是内积空间.

定义

$$W_{p,\mathrm{loc}}^k(\Omega) = \{u : u \in W_p^k(\Omega_0),\ \forall\, \Omega_0 \Subset \Omega\}.$$

称 $u_m$ 在 $W_{p,\mathrm{loc}}^k(\Omega)$ 中收敛于 $u$, 是指

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m - u\|_{k,p,\Omega_0} = 0, \quad \forall\, \Omega_0 \Subset \Omega.$$

空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中的完备化记为 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$. 易证 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 是 Banach 空间. 通常又把 $\mathring{W}_2^k(\Omega)$ 写成 $H_0^k(\Omega)$.

按照定义, $u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$ 当且仅当存在 $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$, 在 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u$. 因此, 空间 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 也可以 "粗略地" 理解为由 $W_p^k(\Omega)$ 中满足

$$\text{对任意的 } |\beta| \leqslant k-1, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上 } D^\beta u = 0$$

的函数 $u$ 构成的空间 (见后面的定理 2.4.3).

通常把 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 的对偶空间记为 $W_{p'}^{-k}(\Omega)$, 其中 $p' = p/(p-1)$ 是 $p$ 的共轭指数. 限于篇幅, 这里不介绍空间 $W_{p'}^{-k}(\Omega)$ 的具体结构, 有兴趣的读者可以参见专著 [1] 的第三章和 [2] 的第三章. 但是在 2.12 节, 我们会给出空间 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$ 的刻画.

**定理 2.1.2** 设 $u, v \in W_p^k(\Omega), |\alpha| \leqslant k$.

(1) $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(\Omega)$;

(2) 对于任意的开集 $\Omega_0 \subset \Omega$, 有 $u \in W_p^k(\Omega_0)$;

(3) 对于任意的 $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, 有 $\zeta u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 并且 Leibniz 公式 (1.8.2) 成立.

**证明**　(1) 对于任意的多重指标 $\beta$, $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$, 由 $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$ 知 $D^{\alpha+\beta}u$ 存在且属于 $L^p(\Omega)$. 从而 $D^\beta(D^\alpha u)$ 存在且等于 $D^{\alpha+\beta}u$. 按照定义有, $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(\Omega)$.

结论 (2) 是明显的.

现在证明结论 (3). 因为 $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, 由公式 (1.8.2) 知, 对任何长度不超过 $k$ 的多重指标 $\alpha$, 有 $D^\alpha(\zeta u) \in L^p(\Omega)$. 又因为在 $\Omega$ 的外部 $D^\alpha(\zeta u) \equiv 0$, 所以 $D^\alpha(\zeta u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 证毕.

下面讨论空间 $W_p^k(\Omega)$ 的可分性、一致凸性和自反性.

记 $m_k$ 是长度不超过 $k$ 的所有多重指标的个数. 定义 $L^p(\Omega)$ 的 Descartes 积空间

$$L^p_{m_k}(\Omega) = \prod_{j=1}^{m_k} L^p(\Omega),$$

在 $L^p_{m_k}(\Omega)$ 中, $u = (u_1, \cdots, u_{m_k})$ 的范数定义为

$$\|u\|_{L^p_{m_k}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \|u_i\|_{p,\Omega}^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{1 \leqslant i \leqslant m_k} \|u_i\|_{\infty,\Omega}, & p = \infty. \end{cases}$$

由 1.3.4 节的结论知, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $L^p_{m_k}(\Omega)$ 是可分的, 当 $1 < p < \infty$ 时 $L^p_{m_k}(\Omega)$ 是一致凸的 (当然是自反的).

把长度不超过 $k$ 的所有多重指标按照某种方式顺次排列. 那么对每一个 $u \in W_p^k(\Omega)$, 向量值函数

$$Pu = (D^\alpha u)_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k}$$

属于 $L^p_{m_k}(\Omega)$. 显然,

$$W = \{Pu : u \in W_p^k(\Omega)\}$$

是 $L^p_{m_k}(\Omega)$ 的一个子空间. 由 $\|Pu\|_{L^p_{m_k}(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega}$ 易知, $P$ 是映 $W_p^k(\Omega)$ 到 $W$ 的一个等距同构. 因为 $W_p^k(\Omega)$ 是完备的, 所以 $W$ 是 $L^p_{m_k}(\Omega)$ 的一个闭子空间. 再由定理 A.2 知, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时 $W$ 是可

分的. 当 $1<p<\infty$ 时 $W$ 是一致凸的 (当然是自反的). 注意到 $P$ 是一个等距同构, 因而 $W_p^k(\Omega)=P^{-1}W$ 也有同样的性质. 这样就得到下面的定理.

**定理 2.1.3** *当 $1\leqslant p<\infty$ 时, $W_p^k(\Omega)$ 是可分的. 当 $1<p<\infty$ 时, $W_p^k(\Omega)$ 是一致凸的, 从而也是自反的.*

最后, 我们讨论空间 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 中的等价范数.

如果 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域位于两个平行的超平面之间, 则称这样的区域具有有限宽度.

**定理 2.1.4** *假设 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 如果区域 $\Omega$ 具有有限宽度, 那么 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 中的半范数*

$$\|D^k u\|_{p,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_{p,\Omega}^p\right)^{1/p}$$

*成为一个范数, 并且与通常的范数 $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ 等价.*

**证明** 不妨假设 $\Omega$ 位于 $x_n=0$ 与 $x_n=d$ 之间. 对于任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\phi(x)=\int_0^{x_n}\phi_t(x',t)\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{p,\Omega}^p&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{d}x'\int_0^d|\phi(x)|^p\mathrm{d}x_n\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{d}x'\int_0^d x_n^{p-1}\mathrm{d}x_n\int_0^d|D_n\phi(x',t)|^p\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{d^p}{p}\|D\phi\|_{p,\Omega}^p.\end{aligned}$$

从而

$$\|D\phi\|_{p,\Omega}^p\leqslant\|\phi\|_{1,p,\Omega}^p=\|\phi\|_{p,\Omega}^p+\|D\phi\|_{p,\Omega}^p\leqslant(1+d^p/p)\|D\phi\|_{p,\Omega}^p.$$

对导数 $D^\alpha u$ ($|\alpha|\leqslant k-1$) 连续地应用上面的不等式便推出

$$\|D^k\phi\|_{p,\Omega}\leqslant\|\phi\|_{k,p,\Omega}\leqslant C_n\|D^k\phi\|_{p,\Omega}.$$

再利用完备性可知, 上式对于 $u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$ 也成立. 证毕

## 2.2 逼近

从现在开始至本章结束, 如无特别说明, 我们总假定 $k$ 是正整数, $1 \leqslant p < \infty$. 回顾前面的定义 $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

### 2.2.1 用光滑函数局部逼近

**定理 2.2.1** 设 $u \in W_p^k(\Omega)$, 并记 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. 那么当 $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ 时, 在空间 $W_{p,\mathrm{loc}}^k(\Omega)$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$.

**证明** 首先证明, 对于任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 有

$$D^\beta u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\beta u, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.2.1}$$

事实上, 当 $x \in \Omega_\varepsilon$ 时,

$$\begin{aligned} D^\beta u^\varepsilon(x) &= D^\beta \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega D_x^\beta \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D_y^\beta \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

注意到对于任意固定的 $x \in \Omega_\varepsilon$, 函数 $\phi(y) = \eta_\varepsilon(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$, 由弱导数的定义知

$$\int_\Omega D_y^\beta \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\beta u(y)\mathrm{d}y.$$

因此, 式 (2.2.1) 成立.

任取开集 $\Omega_0 \Subset \Omega$. 利用定理 1.5.1 的结论 (4) 知, 对于任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ 时, 在 $L^p(\Omega_0)$ 中 $D^\beta u^\varepsilon \longrightarrow D^\beta u$. 因此, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ 时

$$\|u^\varepsilon - u\|_{k,p,\Omega_0}^p = \sum_{|\beta| \leqslant k} \|D^\beta u^\varepsilon - D^\beta u\|_{p,\Omega_0}^p \longrightarrow 0$$

**注 2.2.1** *假设 $u \in W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$. 那么对任意给定的 $\sigma > 0$, 在 $W_p^k(\mathbb{R}_\sigma^n)$ 中 $u^\varepsilon \longrightarrow u$. 这里 $\mathbb{R}_\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \sigma\}$.*

**证明** 利用定理 1.5.1 的结论 (6) 和定理 2.2.1 的证明方法. 细节留作习题.

下面给出一个应用. 在微积分中我们已经知道, 如果 $u \in C^1(\Omega)$ 并且 $Du = 0$, 那么 $u$ 是常数. 下面证明该结论对于 $u \in W_p^1(\Omega)$ 仍然成立.

**定理 2.2.2** *假设 $u \in W_p^1(\Omega)$. 如果 $Du = 0$ 在 $\Omega$ 内几乎处处成立, 那么在 $\Omega$ 的任一连通分支内 $u$ 几乎处处是常数.*

**证明** 不妨认为 $\Omega$ 本身就是连通的. 对于任意给定的连通子集 $\Omega_0 \Subset \Omega$, 利用式 (2.2.1) 知, 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 在 $\Omega_0$ 内 $Du^\varepsilon \equiv 0$. 因为 $u^\varepsilon$ 连续, 所以在 $\Omega_0$ 内 $u^\varepsilon$ 是常数, 记为 $C(\varepsilon)$. 利用

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|C(\varepsilon) - u\|_{p,\Omega_0} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|_{p,\Omega_0} = 0,$$

$$\|C(\varepsilon_1) - C(\varepsilon_2)\|_{p,\Omega_0} \leqslant \|C(\varepsilon_1) - u\|_{p,\Omega_0} + \|C(\varepsilon_2) - u\|_{p,\Omega_0}$$

得 $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+} \|C(\varepsilon_1) - C(\varepsilon_2)\|_{p,\Omega_0} = 0$, 故有

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+} |C(\varepsilon_1) - C(\varepsilon_2)| = 0.$$

因而极限 $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C(\varepsilon) = C$ 存在, 即 $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon = C$. 又因为 $u^\varepsilon$ 几乎处处收敛于 $u$, 所以 $u = C$ 在 $\Omega_0$ 内几乎处处成立. 由 $\Omega_0$ 的任意性便得结论. 证毕.

### 2.2.2 用光滑函数整体逼近

**定理 2.2.3** *对于 $u \in W_p^k(\Omega)$, 存在 $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$, 使得在空间 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u$.*

**证明** 不妨认为原点属于 $\Omega$. 记

$$D_j = \Omega \cap B_j, \quad \Omega_j = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial D_j) > 1/j\},$$

那么 $\Omega=\bigcup_{j=2}^{\infty}\Omega_j$. 再记 $U_j=\Omega_{j+3}\setminus\overline{\Omega}_{j+1}$ 并取开集 $U_0\Subset\Omega$ 使得 $\Omega=\bigcup_{j=0}^{\infty}U_j$. 假设 $\{\zeta_j\}$ 是 $\Omega$ 从属于开覆盖 $\{U_j\}$ 的一个 $C^\infty$-单位分解 (定理 1.7.3), 那么 $\zeta_j u\in W_p^k(\Omega)$, 并且 $\mathrm{spt}\{\zeta_j u\}\subset U_j$.

对于任意固定的 $\delta>0$, 取 $\varepsilon_j>0$ 适当小, 使得 $u_j=\eta_{\varepsilon_j}*(\zeta_j u)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{spt}\{u_j\}\subset W_j:=\Omega_{j+4}\setminus\overline{\Omega}_j\supset U_j, & j=1,2,\cdots\\ \|u_j-\zeta_j u\|_{k,p,W_j}\leqslant\dfrac{\delta}{2^{j+1}}, & j=0,1,\cdots.\end{cases}$$

记 $v=\sum_{j=0}^{\infty}u_j$. 因为对任意开集 $V\Subset\Omega$ 都可找到 $j_0$ 使当 $j>j_0$ 时有 $W_j\cap V=\emptyset$, 所以 $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ 中至多有 $u_0,\cdots,u_{j_0}$ 在 $V$ 中不恒为零. 因此 $v\in C^\infty(\Omega)$. 又因为 $u=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j u$, 故对任意的 $V\Subset\Omega$,

$$\|v-u\|_{k,p,V}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\|u_j-\zeta_j u\|_{k,p,V}=\sum_{j=0}^{\infty}\|u_j-\zeta_j u\|_{k,p,W_j}\leqslant\delta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}=\delta.$$

此不等式两边关于 $V\Subset\Omega$ 取上确界, 就得到 $\|v-u\|_{W_p^k(\Omega)}\leqslant\delta$. 证毕.

### 2.2.3 用整体光滑函数逼近

**定理 2.2.4** *如果 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^1$, $u\in W_p^k(\Omega)$, 那么存在 $u_m\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 在 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_m\longrightarrow u$.*

**证明**　第一步. 因为 $\partial\Omega\in C^1$, 对于任意固定的 $x_0\in\partial\Omega$, 存在 $r>0$ 和 $C^1$ 函数 $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$, 使得

$$\Omega\cap B_{2r}(x_0)=\{x\in B_{2r}(x_0):x_n>\gamma(x_1,\cdots,x_{n-1})\}.$$

记 $U=\Omega\cap B_r(x_0)$, 并定义

$$x^\sigma=x+\lambda\sigma e_n,\quad x\in U,\ \sigma>0,$$

其中 $e_n=(0,\cdots,0,1)$. 记 $M=\sup_{\Omega\cap B_{2r}(x_0)}|\nabla\gamma|$, 并固定 $\lambda>1+M$. 易证, 对于任意固定的 $0<\sigma\ll1$, 存在 $\Omega_\sigma\Subset\Omega$ 使得 $x^\sigma\in\Omega_\sigma$ 对所有 $x\in U$ 成立.

定义函数 $u_\sigma(x)=u(x^\sigma)=u(x+\lambda\sigma e_n), x\in U$. 当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, 有 $u_\sigma^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u_\sigma\in C^\infty(\overline{U})$. 因为空间 $L^p(U)$ 中的函数是整体连续的, 故存在 $\sigma_j$, 使得

$$\sum_{|\beta|\leqslant k}\left\|D^\beta u_{\sigma_j}-D^\beta u\right\|_{p,U}\leqslant 1/j. \qquad (2.2.2)$$

固定这个 $\sigma_j$. 注意到当 $x\in U$ 时, $x^{\sigma_j}\in\Omega_{\sigma_j}\Subset\Omega$. 根据定理 2.2.1, 存在 $\varepsilon_j$ 使得

$$\sum_{|\beta|\leqslant k}\left\|D^\beta u_{\sigma_j}^{\varepsilon_j}-D^\beta u_{\sigma_j}\right\|_{p,U}\leqslant 1/j. \qquad (2.2.3)$$

记 $v_j=u_{\sigma_j}^{\varepsilon_j}$. 利用

$$\sum_{|\beta|\leqslant k}\left\|D^\beta v_j-D^\beta u\right\|_{p,U}\leqslant\sum_{|\beta|\leqslant k}\left\|D^\beta v_j-D^\beta u_{\sigma_j}\right\|_{p,U}+\sum_{|\beta|\leqslant k}\left\|D^\beta u_{\sigma_j}-D^\beta u\right\|_{p,U}$$

以及不等式 (2.2.2) 和 (2.2.3) 知, 在 $W_p^k(U)$ 中 $v_j\to u$.

第二步 因为 $\partial\Omega$ 是紧的, 所以存在有限个 ($N$ 个) 点 $x_j\in\partial\Omega$, 以及与之对应的常数 $r_j>0$, 使得 $\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^N B_{r_j}(x_j)$. 同上, 记 $U_j=\Omega\cap B_{r_j}(x_j)$. 任取 $\delta>0$, 由第一步的结论知, 存在函数 $v_j\in C^\infty(\overline{U}_j)$, 使得

$$\|v_j-u\|_{k,p,U_j}\leqslant\delta.$$

取开集 $U_0\Subset\Omega$ 使 $\Omega=\bigcup_{j=0}^N U_j$, 那么 $\overline{\Omega}\subset U_0\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^N B_{r_j}(x_j)\right)$. 利用定理 2.2.1 知, 存在 $v_0\in C^\infty(\overline{U}_0)$, 满足

$$\|v_0-u\|_{k,p,U_0}\leqslant\delta.$$

取 $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$ 是 $\overline{\Omega}$ 从属于开覆盖 $\{U_0, B_{r_j}(x_j), j=1,\cdots,N\}$ 的一个 $C^\infty$-单位分解, 并定义 $v=\sum_{j=0}^N\zeta_j v_j$. 显然有 $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$. 又因为 $u=\sum_{j=0}^N\zeta_j u$, 利用 Leibniz 公式 (1.8.2) 知, 对任意满足 $|\beta|\leqslant k$ 的多

重指标 $\beta$, 有

$$\begin{aligned}\|D^\beta v - D^\beta u\|_{p,\Omega} &\leqslant \sum_{j=0}^{N} \| D^\beta(\zeta_j v_j) - D^\beta(\zeta_j u) \|_{p,U_j} \\ &\leqslant C\sum_{j=0}^{N} \|v_j - u\|_{k,p,U_j} \\ &\leqslant C(N+1)\delta,\end{aligned}$$

这里的常数 $C$ 由 $\zeta_j$ $(j=1,\cdots,N)$ 及其导数 (至多到 $k$ 阶) 的最大模确定. 证毕

**注 2.2.2** 因为 Lipschitz 连续函数几乎处处可微, 并且其导数属于 $L^\infty$, 所以定理 2.2.4 对于具有 Lipschitz 连续边界的有界开集 $\Omega$ 也成立.

下面讨论半空间上的逼近

**定理 2.2.5** 如果 $u \in W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$, 那么存在 $u_j \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, 在 $W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$ 中 $u_j \longrightarrow u$. 这里, $\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}$

**证明** 同于定理 2.2.4 的讨论, 对于充分小的 $\sigma > 0$, 考虑半空间 $U_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 2\sigma\}$. 当 $x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ 时, 记 $x^\sigma = x + 2\sigma e_n \in U_\sigma$. 定义函数 $u_\sigma(x) = u(x^\sigma) = u(x + \lambda\sigma e_n)$, $x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$. 显而易见, 当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 有 $u_\sigma^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\sigma \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$.

记

$$A_m = \mathbb{R}_+^n \bigcap \{|x| \leqslant m\}, \quad A_m^c = \mathbb{R}_+^n \bigcap \{|x| > m\}$$

因为 $u, u_\sigma \in W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$, 同于定理 1.5.1 的性质 (6) 的证明, 对于任意固定的 $\delta > 0$, 存在 $m \gg 1$ 使得

$$\int_{A_m^c} (|D^\beta u|^p + |D^\beta u_\sigma|^p)\,\mathrm{d}x < \delta, \quad \forall\ |\beta| \leqslant k \tag{2.2.4}$$

同于定理 1.5.1 的性质 (4) 的证明, 当 $\varepsilon > 0$ 适当小时,

$$\int_{A_{2m}^c} |\eta_\varepsilon * D^\beta u_\sigma|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{A_m^c} |D^\beta u_\sigma|^p \mathrm{d}x < \delta \tag{2.2.5}$$

因为当 $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ 时, $x^\sigma \in U_\sigma$, 同于定理 2.2.1 的证明. 当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 对于任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 有

$$D^\beta u^\varepsilon_\sigma = \eta_\varepsilon * D^\beta u_\sigma, \quad x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}. \tag{2.2.6}$$

于是由式 (2.2.4) ~ (2.2.6) 得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta u^\varepsilon_\sigma - D^\beta u|^p \mathrm{d}x = \int_{A_{2m}} |D^\beta u^\varepsilon_\sigma - D^\beta u|^p \mathrm{d}x + \int_{A^c_{2m}} |D^\beta u^\varepsilon_\sigma - D^\beta u|^p \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_{A_{2m}} |D^\beta u^\varepsilon_\sigma - D^\beta u|^p \mathrm{d}x + 2^p\delta, \quad \forall\, |\beta| \leqslant k.$$

对于上式右端的第一项, 因为当 $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ 时, $x^\sigma \in U_\sigma$, 同于定理 2.2.4 的证明可证, 存在 $\sigma_j$ 和 $\varepsilon_j$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A_{2m}} |D^\beta u^{\varepsilon_j}_{\sigma_j} - D^\beta u|^p \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, |\beta| \leqslant k,$$

即在 $W^k_p(A_{2m})$ 中 $u^{\varepsilon_j}_{\sigma_j}$ 收敛于 $u$. 因而, 在 $W^k_p(\mathbb{R}^n_+)$ 中 $u^{\varepsilon_j}_{\sigma_j} \longrightarrow u$. 定理得证.

最后讨论全空间上的逼近.

**定理 2.2.6** $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

**证明** 假设 $u \in W^k_p(\mathbb{R}^n)$. 取 $u$ 的磨光函数 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$. 由定理 1.5.1 知, $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 此外, 利用式 (2.2.1) 并仿照定理 1.5.1 的证明可证, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\|u^\varepsilon - u\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \longrightarrow 0$. 取截断函数

$$\zeta \in C^\infty_0(B_2), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad 在\ B_1\ 上\ \zeta \equiv 1.$$

再记 $u^\varepsilon_j(x) = u^\varepsilon(x)\zeta(x/j)$. 那么 $u^\varepsilon_j \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. 对于满足 $|\alpha| \leqslant k$ 的多重指标 $\alpha$, 利用 Leibniz 公式 (1.8.2) 可得

$$D^\alpha u^\varepsilon_j(x) = \zeta(x/j)D^\alpha u^\varepsilon + \sum_{\beta\leqslant\alpha,\, |\beta|>0} \binom{\alpha}{\beta} j^{-|\beta|}(D^\beta\zeta)(x/j)D^{\alpha-\beta}u^\varepsilon(x).$$

因此, 对于任意固定的 $\varepsilon > 0$, 当 $j \longrightarrow \infty$ 时

$$\|D^\alpha u^\varepsilon_j - D^\alpha u^\varepsilon\|^p_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant \int_{|x|>j} |D^\alpha u^\varepsilon|^p \mathrm{d}x + \frac{C}{j}\|u^\varepsilon\|^p_{k,p,\mathbb{R}^n} \longrightarrow 0.$$

利用上式以及 $\|u^\varepsilon - u\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \to 0$ 知，存在 $j(\varepsilon)$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，$j(\varepsilon) \longrightarrow \infty$，$\|u^\varepsilon_{j(\varepsilon)} - u\|_{k,p,\Omega} \longrightarrow 0$. 证毕

## 2.3 延拓

延拓方法在函数论和偏微分方程解的先验估计与正则性的研究中都有非常重要的作用．一个函数如果能够用 $C_0^\infty$ 函数来逼近，研究起来就非常方便，很多经典的分析工具都可以被利用．对于开集 $\Omega$，一般而言 $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) \neq W^k_p(\Omega)$，见后面的定理 2.4.4．这说明 $W^k_p(\Omega)$ 中的函数不一定能用 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数来逼近．但是由定理 2.2.6 我们知道，$\overset{\circ}{W}{}^k_p(\mathbb{R}^n) = W^k_p(\mathbb{R}^n)$，所以 $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数可以用 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数来逼近．因而，能否把 $W^k_p(\Omega)$ 中的函数延拓到 $\mathbb{R}^n$ 使之属于 $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ 并保留其原有性质，成为非常关键的技术问题．

**引理 2.3.1** *设 $k$ 是非负整数，则存在常数 $c_1, \cdots, c_{k+1}$，使得*

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-j)^i c_j = 1,\quad i = 0,1,\cdots,k. \tag{2.3.1}$$

该引理的证明是初等的，留作习题．

**引理 2.3.2** *存在常数 $C = C(n,k)$ 和线性映射 $E: W^k_p(\mathbb{R}^n_+) \to W^k_p(\mathbb{R}^n)$，使得对每个 $u \in W^k_p(\mathbb{R}^n_+)$，有*

*(1) 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上 $Eu = u$ 几乎处处成立；*

*(2) $\|Eu\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}$.*

*称算子 $E$ 为延拓算子．*

**证明**　第一步　先考察 $u \in C^k(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 的情况．定义

$$Eu(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} c_j u(x', -jx_n), & x \in \mathbb{R}^n_-, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

其中常数 $c_1, \cdots, c_{k+1}$ 是方程组 (2.3.1) 的解，$\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$．显然，$E$ 是线性映射．

对于任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 因为 $0 \leqslant \beta_n \leqslant k$, 所以

$$D^\beta(Eu)|_{x_n=0^-} = \sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n} D^\beta u(x',0) = D^\beta u(x',0) = D^\beta(Eu)|_{x_n=0^+},$$

故有 $Eu \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

因为当 $x_n > 0$ 时 $D^\beta(Eu) = D^\beta u$, 当 $x_n < 0$ 时

$$D^\beta(Eu) = \sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n} D^\beta u(x', -jx_n).$$

若记

$$v_j(x) = \begin{cases} D^\beta u(x', x_n), & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ D^\beta u(x', -jx_n), & x \in \mathbb{R}^n_-, \end{cases}$$

则有

$$D^\beta(Eu) = \sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n} v_j.$$

利用 $L^p$ 中的 Minkowski 不等式知,

$$\|D^\beta(Eu)\|_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} c_j j^{\beta_n} \|v_j\|_{p,\mathbb{R}^n}. \tag{2.3.3}$$

由于

$$\begin{aligned} \|v_j\|^p_{p,\mathbb{R}^n} &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n_-} |D^\beta u(x', -jx_n)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{j} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta u(x', x_n)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\beta u(x)|^p \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

并且 $p \geqslant 1$, 所以 $\|v_j\|_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant 2\|D^\beta u\|_{p,\mathbb{R}^n_+}$. 再利用式 (2.3.3) 知, 存在正常数 $C = C(n,\beta)$, 与 $p$ 无关, 使得

$$\|D^\beta(Eu)\|_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,\beta)\|D^\beta u\|_{p,\mathbb{R}^n_+}.$$

进而又知, 存在正常数 $C = C(n,k)$, 与 $p$ 无关, 使

$$\|Eu\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k)\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}.$$

第二步 考虑 $u \in W^k_p(\mathbb{R}^n_+)$ 的情况. 由定理 2.2.5 知, 存在 $u_\ell \in C^k(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, 使得 $\|u_\ell - u\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+} \to 0$. 利用第一步的结论又知, $Eu_\ell \in C^k(\mathbb{R}^n)$ 并且具有引理的性质 (1) 和 (2). 于是

$$\|Eu_i - Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n} = \|E(u_i - u_\ell)\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k)\|u_i - u_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}.$$

因为在 $W^k_p(\mathbb{R}^n_+)$ 中 $u_\ell \longrightarrow u$, 由上式得

$$\|Eu_i - Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \longrightarrow 0.$$

故存在 $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 记为 $Eu$, 使得在 $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ 中 $Eu_\ell \longrightarrow Eu$. 利用 $\|Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k)\|u_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}$ 又知, 结论 (2) 对于 $u \in W^k_p(\mathbb{R}^n_+)$ 也成立.

因为在 $\mathbb{R}^n_+$ 上 $Eu_\ell = u_\ell$, 并且 $u_\ell \longrightarrow u$, $Eu_\ell \longrightarrow Eu$ 几乎处处成立, 所以 $Eu = u$ 几乎处处于 $\mathbb{R}^n_+$. 证毕.

**引理 2.3.3** *存在正常数 $C = C(n,k)$ 和线性映射 $E: W^k_p(B^+) \longrightarrow W^k_p(B)$, 使得对每一个 $v \in W^k_p(B^+)$, 有*

*(1) 在 $B^+$ 上 $Ev = v$ 几乎处处成立;*

*(2) $\|Ev\|_{k,p,B} \leqslant C\|v\|_{k,p,B^+}$.*

*这里的 $B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为心的球, $B^+$ 是上半球. 算子 $E$ 被称为延拓算子.*

证明同于引理 2.3.2, 略去.

**定理 2.3.1** *假设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^k$. $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G \Supset \Omega$, 则存在正常数 $C = C(n,k,\Omega,G)$ 和线性映射 $E: W^k_p(\Omega) \to W^k_p(\mathbb{R}^n)$, 使得对每个 $u \in W^k_p(\Omega)$, 都有*

*(1) 在 $\Omega$ 上 $Eu = u$ 几乎处处成立,*

*(2) $\mathrm{spt}\{Eu\} \Subset G$;*

(3) $\|Eu\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}$.

算子 $E$ 被称为延拓算子.

**证明** 第一步 先考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情况. 因为 $\partial\Omega \in C^k$, 并且是紧的, 利用有限覆盖知, 存在 $N$ 个球 $B_j = B_{r_j}(x_j)$, $x_j \in \partial\Omega$, $r_j > 0$ 和对应的函数 $\phi_j \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$ 满足式 (1.4.5), 由 (1.4.6) 式确定了对应的 $\Phi_j$ 和 $\Psi_j$. 取 $\Omega_0 \Subset \Omega$, 使 $\Omega \subset \Omega_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^N B_j\right)$. 显然, 存在有界开集 $G'$ 使 $\Omega \Subset G' \Subset \Omega_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^N B_j\right)$, $G' \Subset G$.

取 $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$ 是 $\bar{\Omega}$ 从属于开覆盖 $\{\Omega_0, B_j\}_{j=1}^N$ 的一个 $C^\infty$ 单位分解, 并记 $u_j = u\zeta_j$. 当 $x \in \Omega$ 时, $u = \sum_{j=0}^N u\zeta_j = \sum_{j=0}^N u_j$, 并且成立

$$u_j \in W_p^k(\Omega), \quad j = 0, 1, \cdots, N,$$

$$\mathrm{spt}\{u_0\} \subset \Omega_0, \ \mathrm{spt}\{u_j\} \subset B_j, \quad j = 1, \cdots, N.$$

按照 (1.4.6) 的方式定义 $\Phi_j$ 和 $\Psi_j$. 在 $B_j$ 中作变换 $y = \Phi_j(x)$, 并记 $v_j(y) = u_j(\Psi_j(y))$, $O_j = \Phi_j(\Omega \cap B_j)$, $j = 1, \cdots, N$. 则 $v_j \in W_p^k(O_j)$, 并且 $O_j$ 的一部分边界位于超平面 $\{y_n = 0\}$ 上, $O_j$ 内的点满足 $y_n > 0$. 由于 $\mathrm{spt}\{u_j\} \subset B_j$, 所以 $v_j$ 在 $\partial O_j \bigcap \{y_n > 0\}$ 的附近为零. 因为 $\Phi_j, \Psi_j \in C^k(\mathbb{R}^n)$, 利用 $v_j(y)$ 与 $u_j(x)$ 之间的关系易知

$$C^{-1}\|v_j\|_{k,p,O_j} \leqslant \|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j} \leqslant C\|v_j\|_{k,p,O_j}, \tag{2.3.4}$$

其中正常数 $C$ 不依赖于 $p$, 仅由 $k$, $B_j$ 和 $D^\alpha\phi_j$ ($|\alpha| \leqslant k$) 确定.

把 $v_j$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \setminus O_j$ 上延拓为零, 那么 $v_j \in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$. 利用引理 2.3.2 知, 存在 $Ev_j \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$(Ev_j)(y) = v_j(y), \quad y \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k)\|v_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+} = C(n,k)\|v_j\|_{k,p,O_j}.$$

利用估计式 (2.3.4) 又得

$$\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k,\Omega)\|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j}. \tag{2.3.5}$$

令 $w_j = (Ev_j)(\Phi_j(x))$, $w = u_0 + \sum_{j=1}^N w_j$. 那么 $w \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 并且在 $\Omega$ 上 $w = u$. 同上, 存在仅依赖于 $k$ 和 $\phi_j$ 的正常数 $C$, 使得

$$\|w_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n}.$$

再利用 $L^p$ 中的 Minkowski 不等式及式 (2.3.5) 知

$$\begin{aligned}\|w\|_{k,p,\mathbb{R}^n} &\leqslant \|u_0\|_{k,p,\mathbb{R}^n} + \sum_{j=1}^N \|w_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\\ &\leqslant \|u_0\|_{k,p,\Omega_0} + C\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j}\\ &\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega},\end{aligned}$$

这里的常数 $C$ 也不依赖于 $p$.

取一个截断函数 $\zeta \in C_0^\infty(G')$, 在 $\Omega$ 上 $\zeta \equiv 1$. 令 $Eu = \zeta w$, 那么 $\operatorname{spt}\{Eu\} \subset G' \Subset G$, $Eu \in W_p^k(G)$, 在 $\Omega$ 上 $Eu = u$. 映射 $E$ 的线性性质以及不等式

$$\|Eu\|_{k,p,G} \leqslant C(n,k,\Omega,G)\|u\|_{k,p,\Omega}$$

都是显然的.

第二步　考虑 $p = \infty$ 的情况. 设 $u \in W_\infty^k(\Omega)$. 因为 $\Omega$ 有界, 所以对任意的 $1 \leqslant p < \infty$, 都有 $u \in W_p^k(\Omega)$, 并且还存在仅依赖于 $k$ 和 $\Omega$ 的正常数 $C(k,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{k,p,\Omega} \leqslant C(k,\Omega)\|u\|_{k,\infty,\Omega}, \quad \forall\, 1 \leqslant p < \infty, \ u \in W_\infty^k(\Omega).$$

利用第一步证得的结论知, 存在 $E_p u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 使得 $E_p u = u$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立, $\operatorname{spt}\{E_p u\} \Subset G' \Subset G$, 并且存在与 $p$ 无关的正常数 $C$, 使得

$$\|E_p u\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

容易看出, 当 $j \geqslant p$ 时, $E_j u \in W_p^k(G)$, 并且还可以选取一个与 $j$ 和 $p$ 无关的常数 $C$, 使得

$$\|E_j u\|_{k,p,G} \leqslant C\|E_j u\|_{k,j,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}, \quad \forall\, j \geqslant p.$$

这说明 $\{E_j u\}_{j=p}^{\infty}$ 是 $W_p^k(G)$ 中的有界列. 因而存在子列, 记为 $\{E_{jp}u\}$, 存在函数 $u_p \in W_p^k(G)$, 使得在 $W_p^k(G)$ 中 $E_{jp}u \rightharpoonup u_p$. 显然, $u_p = u$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立. $\mathrm{spt}\{u_p\}\subset \overline{G'}$ (因为 $\mathrm{spt}\{E_{jp}u\}\Subset G'$), 并且

$$\|u_p\|_{k,p,G} \leqslant \|E_{jp}u\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

先取 $p=1$, 得到序列 $\{E_{j1}u\}$ 和 $u_1\in W_1^k(G)$, 在 $W_1^k(G)$ 中 $E_{j1}u \rightharpoonup u_1$. 再取 $p=2$, 同上, $\{E_{j1}u\}$ 是 $W_2^k(G)$ 中的有界列, 故存在 $\{E_{j1}u\}$ 的子列 $\{E_{j2}u\}$ 和 $u_2\in W_2^k(G)$, 在 $W_2^k(G)$ 中 $E_{j2}u\rightharpoonup u_2$. 易证, $u_2\in W_1^k(G)$ 并且在 $W_1^k(G)$ 中 $u_2=u_1$. 从而, $u_1\in W_2^k(G)$. 重复这样做下去, 利用抽对角线方法便可得到序列 $\{E_{jj}u\}$ 和函数 $u_*$ (事实上, $u_*=u_j$ 对于 $j=1,2,\cdots$ 都成立), 满足

(i) 对于任意的 $1\leqslant q<\infty$, 有 $u_*\in W_q^k(G)$, $\|u_*\|_{k,q,G}\leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}$, 并且在 $W_q^k(G)$ 中 $E_{jj}u\rightharpoonup u_*$;

(ii) $u_*=u$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立, $\mathrm{spt}\{u_*\}\subset\overline{G'}\Subset G$.

利用定理 1.3.7 的 (2), 从事实 (i) 推知 $u_*\in W_\infty^k(G)$ 并且 $\|u_*\|_{k,\infty,G}\leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}$. 再由事实 (ii) 知,

$$u_*\in W_\infty^k(\mathbb{R}^n),\quad \|u_*\|_{k,\infty,\mathbb{R}^n}\leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

若定义 $E_\infty u=u_*$, 那么 $E_\infty$ 的线性性质可以从 $E_p$ 的线性性质和证明过程中看出. 因而 $E_\infty u=u_*$ 即是所要的延拓. 证毕.

**定理 2.3.2** 下面的稠密性结论成立.

(1) $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ 在 $W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$ 中稠密. 这里, $u\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ 是指 $u\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, 并且存在 $K>0$, 当 $x\in\overline{\mathbb{R}_+^n}$ 且 $|x|\geqslant K$ 时 $u(x)=0$;

(2) 如果 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^k$, 那么 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中稠密.

**证明** 记 $A=\Omega$ 或者 $A=\mathbb{R}_+^n$, 并设 $u\in W_p^k(A)$. 当 $A=\Omega$ 时利用定理 2.3.1, 当 $A=\mathbb{R}_+^n$ 时利用引理 2.3.2, 总存在 $v\in W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 使得在 $A$ 上 $v=u$ 并且 $\|v\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\leqslant C\|u\|_{k,p,A}$.

因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 (定理 2.2.6), 故存在 $v_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中 $v_j\longrightarrow v$. 显然, 当 $A=\mathbb{R}_+^n$ 时 $v_j\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, 当 $A=\Omega$

时 $v_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, 并且

$$\|v_j - u\|_{k,p,A} = \|v_j - v\|_{k,p,A} \leqslant \|v_j - v\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \longrightarrow 0.$$

## 2.4 边界迹和迹定理

给定一个函数 $u \in C(\overline{\Omega})$, 我们知道 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值. 给定一个函数 $u \in W_p^k(\Omega)$, $k \geqslant 1$, 如何确定 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值呢? 虽然 $\partial\Omega$ 是 $n-1$ 维的, 任意改变 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值, 都不影响 $u$ 在 $\Omega$ 上的可积性与其积分值, 但是会影响其弱导数. 因此, 对于 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数 $u$ 而言, 简单地讲 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的值是没有意义的. 但是在函数空间以及偏微分方程的研究中, 通常会涉及 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上的 "广义取值", 这就是我们将要引入的边界迹 (有时也简称为迹). 对于给定的 $u \in W_p^k(\Omega)$, $k \geqslant 1$, 在某个等价类中 $u$ 在边界上的迹是唯一确定的.

我们先讨论空间 $W_p^1(\Omega)$.

**定理 2.4.1** *设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, 那么存在一个有界线性算子*

$$\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

*和一个正常数 $C = C(n, p, \Omega)$, 使得*

*(1) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ 对所有 $u \in W_p^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ 成立,*

*(2) $\|\gamma_0 u\|_{p,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}$, $\forall\, u \in W_p^1(\Omega)$.*

*称 $\gamma_0$ 是迹算子, $\gamma_0 u$ 是函数 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的零次迹.*

**证明** 先假设 $u \in C^1(\overline{\Omega})$. 给定 $x_0 \in \partial\Omega$, 并假设在 $x_0$ 的邻域内 $\partial\Omega$ 位于超平面 $\{x_n = 0\}$ 上, 且存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r^+(x_0)$. 简记 $B = B_r(x_0)$, $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

选取 $\zeta \in C_0^\infty(B)$, 在 $B$ 内 $\zeta \geqslant 0$ 并且在 $B_{r/2}(x_0)$ 内 $\zeta \equiv 1$. 记 $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$. 运用 Young 不等式, 直接计算知

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}x' &\leqslant \int_{x_n=0} \zeta |u|^p \mathrm{d}x' = -\int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{B^+} \left[|u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1} (\mathrm{sgn}u) u_{x_n} \zeta\right] \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{B^+} \left(|u|^p + |Du|^p\right) \mathrm{d}x. \qquad (2.4.1)
\end{aligned}$$

对于 $x_0 \in \partial\Omega$ 的一般情况, 因为 $\partial\Omega \in C^1$, 所以存在 $r > 0$ 及函数 $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, 满足式 (1.4.5). 取 $\Phi$ 和 $\Psi$ 由式 (1.4.6) 定义. 在 $B_r$ 中作变换 $y = \Phi(x)$, 并记 $v(y) = u(\Psi(y))$, $O = \Phi(\Omega \cap B_r)$. 则 $v \in W_p^1(O)$, 并且 $O$ 的一部分边界位于超平面 $\{y_n = 0\}$ 上, $O$ 内的点满足 $y_n > 0$. 由上一步的结论知, 对于 $v$ 估计式 (2.4.1) 成立. 再变回原来的自变量, 就得到关于 $u$ 的估计:

$$\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}S \leqslant C \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p) \mathrm{d}x.$$

因为 $\partial\Omega$ 是紧的, 所以存在有限个点 $x_j \in \partial\Omega$ 和有限个开集 $\Gamma_j \subset \partial\Omega$, $1 \leqslant j \leqslant N$, 使 $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$, 并且 $\|u\|_{L^p(\Gamma_j)} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}$, $j = 1, \cdots, N$. 定义

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega},$$

那么

$$\|\gamma_0 u\|_{p,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}, \quad \forall\, u \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.4.2}$$

从上面的推导还可以看出, 这里的常数 $C$ 不依赖于函数 $u$.

对于 $u \in W_p^1(\Omega)$ 的情况, 选取 $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$, 在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $u_j \longrightarrow u$. 那么对于 $u_j$ 而言, 不等式 (2.4.2) 成立. 从而

$$\|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u_i\|_{p,\partial\Omega} \leqslant C\|u_j - u_i\|_{1,p,\Omega}. \tag{2.4.3}$$

这表明 $\{\gamma_0 u_j\}$ 是 $L^p(\partial\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列, 故有极限, 记为 $\gamma_0 u$. 显然, 对于 $u \in W_p^1(\Omega)$ 以及这样确定的 $\gamma_0 u$, 估计式 (2.4.2) 成立. 由不等式 (2.4.3) 还知道, 极限 $\gamma_0 u$ 与逼近的函数列 $\{u_j\}$ 的选取无关.

最后, 如果 $u \in W_p^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$, 还可选取 $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$, 在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $u_j \longrightarrow u$, 在 $\overline{\Omega}$ 上 $u_j$ 一致收敛于 $u$ (见定理 2.2.4 的证明). 因此 $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$. 证毕.

下面的定理给出了 $W_p^1(\Omega)$ 函数的迹为零的充分必要条件.

**定理 2.4.2** 假设 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega \in C^1$, $u \in W_p^1(\Omega)$. 那么, $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ 当且仅当在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma_0 u = 0$.

**证明**　(1) 先设 $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. 按照定义, 存在 $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$, 在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $u_j \longrightarrow u$. 因为在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma_0 u_j = 0$ 并且 $\gamma_0: W_p^1(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ 是有界线性算子, 所以 $\gamma_0 u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立.

(2) 假设在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma_0 u = 0$. 利用单位分解和边界拉平变换 (见定理 2.3.1 的证明), 不妨认为

$$u \in W_p^1(B_r^+),\quad \operatorname{spt}\{u\} \subset B_r^+ \cup \{x_n = 0\},$$

$$\gamma_0 u = 0 \text{ 在 } \partial B_r^+ \cap \{x_n = 0\} \text{ 上成立.}$$

简记 $B^+ = B_r^+$, $\Gamma = \partial B^+ \cap \{x_n = 0\}$. 利用逼近定理以及 $\gamma_0$ 的连续性知, 存在 $u_j \in C^1(\overline{B}^+)$, 使得在 $W_p^1(B^+)$ 和 $L^p(\Gamma)$ 中分别有

$$u_j \longrightarrow u,\quad u_j|_\Gamma = \gamma_0 u_j \longrightarrow \gamma_0 u = 0. \tag{2.4.4}$$

对于 $x \in B^+$, 有

$$|u_j(x', x_n)| \leqslant |u_j(x', 0)| + \int_0^{x_n} |D_n u_j(x', t)|\, \mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma |u_j(x', x_n)|^p \mathrm{d}x' \\ &\leqslant C\left(\int_\Gamma |u_j(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_\Gamma |D_n u_j(x', t)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

关于变元 $x_n$ 从 0 到 $x_n$ 积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^{x_n} \int_\Gamma |u_j(x', s)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}s \\ &\leqslant C\left(x_n \int_\Gamma |u_j(x', 0)|^p \mathrm{d}x' + \int_0^{x_n} s^{p-1} \int_0^s \int_\Gamma |D_n u_j(x', t)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

令 $j \longrightarrow \infty$, 并利用式 (2.4.4) 可得

$$\int_0^{x_n} \int_\Gamma |u(x', s)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}s \leqslant C \int_0^{x_n} s^{p-1} \int_0^s \int_\Gamma |D_n u(x', t)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \mathrm{d}s. \tag{2.4.5}$$

再做拉伸变换, 不妨认为球 $B_r$ 的半径 $r = 3$. 取 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, 在 $[0, 1]$ 上 $\zeta(t) = 1$, 当 $t \geqslant 2$ 时 $\zeta(t) = 0$, 并且 $0 \leqslant \zeta(t) \leqslant 1$. 令

$$\zeta_j(x) = \zeta(jx_n),\quad v_j(x) = u(x)(1 - \zeta_j(x)),\quad x \in B^+,$$

那么 $\mathrm{spt}\{v_j\}\subset B^+$，并且

$$D_n v_j=(1-\zeta_j)D_n u-ju\zeta'(jx_n),\quad D_{x'}v_j=(1-\zeta_j)D_{x'}u.$$

因而

$$\int_{B^+}|Dv_j-Du|^p\mathrm{d}x\leqslant C\int_{B^+}|\zeta_j|^p|Du|^p\mathrm{d}x+Cj^p\int_0^{2/j}\int_\Gamma|u|^p\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_n$$
$$=:A_j+B_j.$$

显然，当 $j\longrightarrow\infty$ 时 $A_j\longrightarrow 0$. 由式 (2.4.5) 推得，当 $j\longrightarrow\infty$ 时，

$$B_j\leqslant Cj^p\int_0^{2/j}s^{p-1}\mathrm{d}s\int_0^{2/j}\int_\Gamma|D_nu(x',t)|^p\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C\int_0^{2/j}\int_\Gamma|Du_n(x',t)|^p\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\longrightarrow 0,$$

故在 $L^p(B^+)$ 中 $Dv_j\longrightarrow Du$. 因为在 $L^p(B^+)$ 中 $v_j\longrightarrow u$ 显然成立，所以在 $W_p^1(B^+)$ 中 $v_j\longrightarrow u$. 把 $v_j$ 磨光，就得到函数 $u_j\in C_0^\infty(B^+)$，并且在 $W_p^1(B^+)$ 中 $u_j\longrightarrow u$. 因而 $u\in\mathring{W}_p^1(B^+)$. 证毕.

我们通常把 $\gamma_0u$ 写成 $u|_{\partial\Omega}$.

**注 2.4.1** 根据 $\gamma_0$ 的定义，从定理 2.2.4 和定理 2.4.2 的证明可以看出：如果 $u\in\mathring{W}_p^1(\Omega)$ 并且 $u\geqslant 0$，我们可以选取 $C_0^1(\Omega)$ 中的非负逼近序列 $\{u_j\}$ 在 $W_p^1(\Omega)$ 中逼近 $u$. 逼近序列 $\{u_j\}$ 是非负的这一事实在偏微分方程弱解的研究中确定检验 (试验) 函数时非常重要.

下面我们讨论空间 $W_p^k(\Omega)$ 上的高次迹, $k\geqslant 2$. 如果 $\partial\Omega\in C^k$，对任何 $x_0\in\partial\Omega$，存在球 $B_r=B_r(x_0)$ 以及函数 $\varphi\in C^k(\mathbf{R}^{n-1})$ 使得

$$\Omega\cap B_r=\{x\in B_r:x_n>\varphi(x')\},$$
$$\partial\Omega\cap B_r=\{x\in B_r:x_n=\varphi(x')\},$$

这里 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 在 $\partial\Omega\cap B_r$ 上，单位外法向量 $\nu(x)=(\nu_1(x),\cdots,\nu_n(x))$ 可以表示成

$$\nu_i(x)=\frac{D_i\varphi(x')}{\sqrt{1+|D\varphi(x')|^2}},\quad i=1,\cdots,n-1,\quad \nu_n(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+|D\varphi(x')|^2}}$$

显然，这个向量值函数 $\nu(x)$ 在 $\overline{B}_r$ 上有定义并且属于 $C^{k-1}(\overline{B}_r)$. 取光滑区域 $G$ 使得 $\Omega\cap B_{r/2}\subset G\subset\Omega\cap B_r$. 在 $G$ 上定义函数 $u^m(x)$:

$$u^m(x)=\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha u(x)\nu^\alpha(x),\quad m=1,\cdots,k-1,$$

这里 $\nu^\alpha=\nu_1^{\alpha_1}\cdots\nu_n^{\alpha_n}$. 那么 $u^m\in W_p^1(G)$, $m=1,\cdots,k-1$. 因此，$\gamma_0 u^m$ 有意义. 由于 $\Gamma=\partial\Omega\cap B_{r/2}\subset\partial G$, 我们可以定义

$$\gamma_m u|_\Gamma=\gamma_0 u^m|_\Gamma,$$

称为 $u$ 在 $\Gamma$ 上的 $m$ 次迹.

因为在 $\partial\Omega$ 的每一点处，单位外法向 $\nu$ 是唯一确定的，所以当 $u\in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ 时，函数 $u^m(x)|_\Gamma=\frac{\partial^m u}{\partial\nu^m}\Big|_\Gamma$ 是唯一确定的，与球 $B_r$ 和函数 $\phi$ 的取法无关. 当 $u\in W_p^{m+1}(\Omega)$ 时，$u$ 是 $C^{m+1}(\overline{\Omega})$ 中的一列函数 $\{u_l\}$ 的极限. 不难证明，在 $W_p^1(G)$ 中 $u_l^m$ 收敛到 $u^m$, 故在 $L^p(\Gamma)$ 中 $\frac{\partial^m u_l}{\partial\nu^m}\Big|_\Gamma$ 收敛到 $\gamma_0 u^m|_\Gamma$. 所以 $\gamma_0 u^m|_\Gamma$ 与球 $B_r$ 和函数 $\phi$ 的取法无关. 此外还可以证明，$\gamma_0 u^m|_\Gamma$ 与逼近序列 $\{u_l\}$ 的取法也无关. 因而，$\gamma_m u|_\Gamma=\gamma_0 u^m|_\Gamma$ 是唯一确定的，只与 $\Omega$ 在 $\Gamma$ 附近的结构 (形状) 有关.

利用有限覆盖定理，存在 $N$ 个球 $B_j=B_{r_j}(x_j)$, $x_j\in\partial\Omega$, $r_j>0$, 以及 $\Gamma_j=\partial\Omega\cap B_{r_j/2}$, 使得

$$\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^N\Gamma_j\subset\bigcup_{j=1}^N B_j.$$

同时对每一个 $j$, 存在着对应的函数 $\phi$, $u^m$ 和对应的算子 $\gamma_m$, 分别记为 $\phi_j$, $u_j^m$ 和 $\gamma_m^j$. 显然，存在 $\sigma>0$, 使 $O=\{x\in\overline{\Omega}:\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\leqslant\sigma\}\subset\bigcup_{j=1}^N B_j$. 记 $\{\zeta_j\}_{j=1}^N$ 是 $O$ 从属于开覆盖 $\{B_j\}_{j=1}^N$ 的一个 $C^\infty$-单位分解，并定义

$$\gamma_m u|_{\partial\Omega}=\sum_{j=1}^N\zeta_j|_{\Gamma_j}\gamma_m^j u|_{\Gamma_j}=\sum_{j=1}^N\zeta_j|_{\Gamma_j}\gamma_0 u_j^m|_{\Gamma_j}.$$

从上面的讨论可以看出，$\gamma_m u|_{\partial\Omega}$ 与覆盖球 $B_j$、函数 $\phi_j$ 以及单位分解 $\zeta_j$ 的取法无关. 我们把 $\gamma_m u|_{\partial\Omega}$ 称为 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的 $m$ 次迹，通常把它

简写成 $\gamma_m u$，或者 $(\gamma_0 \circ \frac{\partial^m}{\partial \nu^m})u$，或者 $\gamma_0 \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}$. 称 $\frac{\partial^m}{\partial \nu^m}$ 是沿着 $\partial\Omega$ 的 $m$ 次外法向导数.

**定理 2.4.3** 假定 $\Omega$ 有界，$\partial\Omega \in C^k$，$u \in W_p^k(\Omega)$. 那么，$u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$ 当且仅当对于任意长度小于 $k$ 的多重指标 $\alpha$，导数 $D^\alpha u$ 在 $\partial\Omega$ 上的零次迹为零. 若定义

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{k-1}),$$

则有

$$\mathring{W}_p^k(\Omega) = \mathrm{Ker}\gamma = \left\{u \in W_p^k(\Omega) : \gamma u = (0, \cdots, 0)\right\}.$$

称 $\gamma$ 为迹算子.

**证明** 利用归纳法，只需对 $k = 2$ 的情况给出证明.

就 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数 $u$ 而言，对任意的 $\alpha$ 都有 $D^\alpha u \in C_0^\infty(\Omega)$，故 $u|_{\partial\Omega}, D_i u|_{\partial\Omega} = 0, i = 1, \cdots, n$，对应的 $u^1|_{\partial\Omega} = 0$. 因为迹算子 $\gamma_0$ 是从 $W_p^1(\Omega)$ 到 $L^p(\partial\Omega)$ 的线性连续算子，所以当 $u \in \mathring{W}_p^2(\Omega)$ 时，$\gamma_0 u$，$\gamma_0 D_i u\ (i = 1, \cdots, n)$ 和 $\gamma_0 u^1$ 也都等于零. 从而 $\gamma u = (0, 0)$.

如果 $u \in W_p^2(\Omega)$ 且 $\gamma_0 u = \gamma_0 D_i u = 0, i = 1, \cdots, n$. 取 $u_j \in C^2(\overline{\Omega})$，在 $W_p^2(\Omega)$ 中 $u_j \longrightarrow u$. 那么在 $L^p(\partial\Omega)$ 中 $u_j|_{\partial\Omega} \longrightarrow \gamma_0 u = 0$，$D_i u_j|_{\partial\Omega} \longrightarrow \gamma_0 D_i u = 0$. 因而在 $L^p(\partial\Omega)$ 中，

$$\gamma_0 u^1 \longleftarrow \gamma_0 u_j^1 = \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = Du_j \cdot \nu|_{\partial\Omega} \longrightarrow 0,$$

故 $\gamma_0 u^1 = 0$，从而 $\gamma u = (0, 0)$. 因此，只需对于 $u \in W_p^2(\Omega)$ 且 $\gamma u = (0, 0)$ 的情况，证明 $u \in \mathring{W}_p^2(\Omega)$.

仍然采用定理 2.4.2 的证明中的记号. 对于 $D_n u$ 利用估计式 (2.4.5) 可得

$$\int_0^{x_n} \int_\Gamma |u(x', s)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}s \leqslant C \int_0^{x_n} s^{2p-1} \int_0^s \int_\Gamma |D_{nn} u(x', t)|^p \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \mathrm{d}s \tag{2.4.6}$$

利用估计式 (2.4.5) 和 (2.4.6)，仿照定理 2.4.2 的证明可推得，在 $W_p^2(B^+)$ 中 $v_j \longrightarrow u$. 再把 $v_j$ 磨光便可完成证明. 证毕.

**定理 2.4.4**　当 $1\leqslant p<\infty$ 时, $W_p^k(\mathbb{R}^n)=\mathring{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$, $W_p^0(\Omega)=\mathring{W}_p^0(\Omega)=L^p(\Omega)$. 但是对一般区域 $\Omega$, 当 $k\geqslant 1$ 时 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 可能是 $W_p^k(\Omega)$ 的真子空间.

**证明**　利用定理 2.3.2, $W_p^k(\mathbb{R}^n)=\mathring{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$.

由定理 1.3.9 知, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密. 因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密, 所以 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密. 从而 $W_p^0(\Omega)=\mathring{W}_p^0(\Omega)=L^p(\Omega)$.

当 $\Omega$ 的测度有限且 $k\geqslant 1$ 时, $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 是 $W_p^k(\Omega)$ 的真子空间. 事实上, 对于 $u=1$, 显然 $u\in W_p^k(\Omega)$, 但是 $u\notin\mathring{W}_p^k(\Omega)$. 这是因为, 若 $u\in\mathring{W}_p^k(\Omega)$, 由定理 2.4.1 和 2.4.2 可得 $1=u|_{\partial\Omega}=\gamma_0 u=0$, 矛盾.

当 $\Omega$ 具有一些特殊性质时, 有 $\mathring{W}_p^k(\Omega)=W_p^k(\Omega)$. 具体细节请参看文献 [1] 的定理 3.28 和定理 3.31 (文献 [2] 的定理 3.33).

## 2.5　空间 $W_p^1(\Omega)$ 的基本性质

本节先讨论 $W_p^1(\Omega)$ 中的函数与一个性质"较好"的函数复合之后的性质, 再讨论差商与空间 $W_p^1(\Omega)$ 的关系, 最后讨论 Lipschitz 函数和空间 $W_\infty^1(\Omega)$ 之间的关系.

### 2.5.1　复合函数的性质

**定理 2.5.1**　假定 $1\leqslant p<\infty$, $f\in C^1(\mathbb{R})$ 并且 $f'\in L^\infty(\mathbb{R})$. 若 $u\in W_p^1(\Omega)$, 则 $D(f(u))=f'(u)Du\in L^p(\Omega)$.

如果又设 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^1$, 则 $f(u)\in W_p^1(\Omega)$, $f(u)|_{\partial\Omega}=f(u|_{\partial\Omega})$. 由此知, 当 $u\in\mathring{W}_p^1(\Omega)$ 并且 $f(0)=0$ 时, $f(u)\in\mathring{W}_p^1(\Omega)$.

**证明**　假设 $u\in W_p^1(\Omega)$. 根据定理 2.2.3, 存在 $u_j\in C^\infty(\Omega)\cap W_p^1(\Omega)$, 在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $u_j\to u$. 于是对任意的 $\Omega'\Subset\Omega$, 当 $j\to\infty$ 时, 有

$$\int_{\Omega'}|f(u_j)-f(u)|^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\sup|f'|\right)^p\int_{\Omega'}|u_j-u|^p\mathrm{d}x\to 0\qquad(2.5.1)$$

这表明在 $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ 中 $f(u_j)\longrightarrow f(u)$. 由于 $u_j\longrightarrow u$ 几乎处处于 $\Omega$ 并且 $f'$ 连续，所以 $f'(u_j)\longrightarrow f'(u)$ 几乎处处于 $\Omega$. 由控制收敛定理知，

$$\int_\Omega |f'(u_j)Du_j-f'(u)Du|^p{\rm d}x\leqslant C\big(\sup|f'|\big)^p\int_\Omega|Du_j-Du|^p{\rm d}x$$
$$+C\int_\Omega|f'(u_j)-f'(u)|^p|Du|^p{\rm d}x\longrightarrow 0,$$

因而在 $L^p(\Omega)$ 中 $D(f(u_j))=f'(u_j)Du_j\longrightarrow f'(u)Du$. 对于任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，利用

$$\int_\Omega\phi D(f(u_j)){\rm d}x=-\int_\Omega f(u_j)D\phi{\rm d}x,$$

以及在 $L^p(\Omega)$ 中 $D(f(u_j))\longrightarrow f'(u)Du$，在 $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ 中 $f(u_j)\longrightarrow f(u)$，便可推出

$$\int_\Omega\phi D(f(u)){\rm d}x=-\int_\Omega f(u)D\phi{\rm d}x.$$

这说明 $f(u)$ 有一阶弱导数并且 $D(f(u))=f'(u)Du\in L^p(\Omega)$.

再设 $\partial\Omega\in C^1$. 根据定理 2.2.4，存在 $u_j\in C^1(\overline{\Omega})$，在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $u_j\longrightarrow u$. 显然 $f(u_j)\in L^p(\Omega)$，从而式 (2.5.1) 对于 $\Omega$ 也成立，故在 $L^p(\Omega)$ 中 $f(u_j)\longrightarrow f(u)$. 因此，$f(u)\in W_p^1(\Omega)$ 并且在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $f(u_j)\longrightarrow f(u)$.

利用定理 2.4.1，当 $j\longrightarrow\infty$ 时

$$\begin{cases}\|\gamma_0u_j-\gamma_0u\|_{p,\partial\Omega}=\|\gamma_0(u_j-u)\|_{p,\partial\Omega}\leqslant C\|u_j-u\|_{1,p,\Omega}\longrightarrow 0,\\ \|\gamma_0f(u_j)-\gamma_0f(u)\|_{p,\partial\Omega}\leqslant C\|f(u_j)-f(u)\|_{1,p,\Omega}\longrightarrow 0.\end{cases}\tag{2.5.2}$$

注意到 $u_j\in C(\overline{\Omega})$，$f(u_j)\in C(\overline{\Omega})$ 并且 $f$ 连续，由定理 2.4.1 知 $\gamma_0f(u_j)=f(\gamma_0u_j)$. 再利用式 (2.5.2) 得 $\gamma_0f(u)=f(\gamma_0u)$，即 $f(u)|_{\partial\Omega}=f(u|_{\partial\Omega})$. 证毕.

**注 2.5.1** (1) 请读者思考，为何在定理 2.5.1 第一个结论的证明中，式 (2.5.1) 中的积分区域不用 $\Omega$ 而是用 $\Omega$ 的紧子区域?

(2) 如果仅假设 $f$ 是 Lipschitz 连续函数，那么当 $u\in W_p^1(\Omega)$ 并且 $f(u)\in L^p(\Omega)$ 时，定理 2.5.1 的第一个结论仍然成立.

**定理 2.5.2**　如果 $u \in W_p^1(\Omega)$ 对某个 $p \geqslant 1$ 成立，那么 $u^+$、$u^-$ 和 $|u|$ 也都属于 $W_p^1(\Omega)$，并且它们的一阶弱导数还可以表示为

$$Du^+(x) = \begin{cases} Du(x), & u(x) > 0, \\ 0, & u(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$Du^-(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \geqslant 0, \\ Du(x), & u(x) < 0, \end{cases}$$

$$D|u|(x) = \begin{cases} Du(x), & u(x) > 0, \\ 0, & u(x) = 0, \\ -Du(x), & u(x) < 0. \end{cases}$$

**证明**　对于 $\varepsilon > 0$，定义

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0, \end{cases}$$

那么 $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ 并且 $f'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$. 利用定理 2.5.1 的第一个结论知，对任意的 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$，

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u) D\varphi \mathrm{d}x = -\int_{u>0} \varphi \frac{uDu}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}} \mathrm{d}x$$

令 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 得

$$\int_\Omega u^+ D\varphi \mathrm{d}x = -\int_{u>0} \varphi Du \mathrm{d}x$$

因此结论对于 $u^+$ 成立. 同理可证另外两个结论.

**定理 2.5.3**　假定 $u \in W_p^1(\Omega)$ 对某个 $p \geqslant 1$ 成立. 对于任意常数 $c$，定义 $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}$，那么 $Du = 0$ 在 $\Omega_c$ 上几乎处处成立.

**证明**　只要证明结论对于 $c = 0$ 成立即可. 由于 $Du = Du^+ + Du^-$，利用定理 2.5.2 即得所要的结论.

一个一元函数被称为是分段光滑的，如果它本身连续并且有分段连续的一阶导数. 下面的定理推广了定理 2.5.1 的第一个结论和定理 2.5.2.

**定理 2.5.4** 假设 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的分段光滑函数且 $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. 如果 $u \in W_p^1(\Omega)$ 对某个 $p \geqslant 1$ 成立. 那么 $f(u)$ 也有一阶弱导数. 进一步, 若记 $L$ 是 $f'$ 的间断点集合, 还有

$$D(f(u))(x) = \begin{cases} f'(u(x))Du(x), & u(x) \notin L, \\ 0, & u(x) \in L. \end{cases}$$

**证明** 按照定义, $L$ 至多是可数集. 利用归纳法, 不妨认为 $L$ 只包含一个点. 再做平移, 还可以认为该点是原点并且 $f(0) = 0$. 取函数 $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ 使之满足 $f_1', f_2' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, 当 $u > 0$ 时 $f_1(u) = f(u)$, 当 $u < 0$ 时 $f_2(u) = f(u)$. 则 $f(u) = f_1(u^+) + f_2(u^-)$. 利用定理 2.5.1 及定理 2.5.2 知结论成立.

函数 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 被称为是双 Lipschitz 映射, 如果它是一一映射, 并且存在正常数 $M$, 使得 $T$ 和 $T^{-1}$ 满足

$$|T(x) - T(y)| \leqslant M|x - y|, \quad |T^{-1}(x) - T^{-1}(y)| \leqslant M|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**定理 2.5.5 ([12, 定理 2.2.2])** 假设 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是双 Lipschitz 映射, $u \in W_p^1(\Omega)$ 对某个 $p \geqslant 1$ 成立. 那么 $v = u \circ T \in W_p^1(\Omega')$, 其中 $\Omega' = T^{-1}(\Omega)$. 同时还有

$$Dv(x) \cdot y = Du(T(x)) \cdot \mathrm{d}T(x)y$$

对几乎所有的 $x \in \Omega'$ 及所有的 $y \in \mathbb{R}^n$ 成立.

### 2.5.2 水平函数的性质

假设 $j$ 是常数, $u$ 是 $\Omega$ 上的可测函数. 令 $u^{(j)} = (u - j)^+$, 称为水平函数. 它实际上是 3 个函数的复合: $u^{(j)} = f \circ g \circ u(x)$, $g(s) = s - j$, $f(\tau) = \tau^+$. 定义

$$A_j = \{x \in \Omega : u(x) > j\}, \quad A_j^\circ = \{x \in \Omega : u(x) = j\},$$

那么 $A_j$ 和 $A_j^\circ$ 都是可测集, 并且

$$A_j = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_{j+\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} |A_j \setminus A_{j+\varepsilon}| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} |A_{j-\varepsilon} \setminus (A_j \cup A_j^\circ)| = 0.$$

**引理 2.5.1** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 如果在 $L^p(\Omega)$ 中序列 $\{u_m\}$ 收敛于 $u$, 那么在 $L^p(\Omega)$ 中序列 $\{u_m^{(j)}\}$ 收敛于 $u^{(j)}$. 同时还有

$$\lim_{m\to+\infty}|A_j\setminus(A_j^m\cap A_j)| = 0, \quad \lim_{m\to+\infty}\left|A_j^m\setminus\left[A_j^m\cap(A_j\cup A_j^o)\right]\right| = 0,$$

其中 $A_j^m = \{x\in\Omega : u_m(x) > j\}$.

**证明** 注意到对任何可测函数 $f$ 和 $g$, 都有 $|f^+ - g^+| \leqslant |f - g|$, 所以

$$\left|u_m^{(j)} - u^{(j)}\right| \leqslant \left|(u_m - j) - (u - j)\right| = |u_m - u|.$$

因而在 $L^p(\Omega)$ 中 $\{u_m^{(j)}\}$ 收敛于 $u^{(j)}$.

现在证第二个结论. 因为在 $L^p(\Omega)$ 中 $\{u_m\}$ 收敛于 $u$, 故存在子列 $\{u_{m_i}\}\subset\{u_m\}$, 在 $\Omega$ 内几乎一致收敛于 $u$, 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$, 使得 $|\Omega_\varepsilon| > |\Omega| - \varepsilon$ 且在 $\Omega_\varepsilon$ 上 $u_{m_i}$ 一致收敛于 $u$. 同时还可以适当缩小 $\Omega_\varepsilon$, 使得 $u$ 在 $\Omega_\varepsilon$ 上连续.

先证明结论对于子列 $\{m_i\}$ 成立. 由于 $|\Omega\setminus\Omega_\varepsilon| < \varepsilon$, 我们可以只对 $\Omega_\varepsilon$ 来证明, 即用 $\Omega_\varepsilon$ 代替 $\Omega$, 亦即下面的证明过程中的集合 $A_j$, $A_j^m$ 分别表示 $\Omega_\varepsilon\cap A_j$, $\Omega_\varepsilon\cap A_j^m$, 等等. 因为 $u$ 连续, 所以 $A_j\cup A_j^o = \overline{A}_j$. 又因为 $u_{m_i}$ 一致收敛于 $u$, 对于任给的 $\delta > 0$, 存在 $m(\delta)$, 当 $m_i \geqslant m(\delta)$ 时, 有 $\sup|u_{m_i} - u| < \delta$. 由此推知

$$A_{j+\delta}\subset A_j^{m_i}\subset A_{j-\delta}.$$

容易看出, 当 $\delta\to 0$ 时 $A_{j+\delta}\to A_j$, $A_{j-\delta}\to\overline{A}_j$. 因而, $\lim\limits_{i\to+\infty}|A_j\setminus(A_j^{m_i}\cap A_j)| = 0$, 当 $\delta\ll 1$ 时 $|A_{j-\delta}\setminus A_j| \ll 1$. 注意到 $A_j^{m_i}\subset A_{j-\delta}$, $\overline{A}_j\subset A_{j-\delta}$, 我们有

$$A_j^{m_i} = A_j^{m_i}\cap A_{j-\delta} = (A_j^{m_i}\cap\overline{A}_j)\bigcup\left[A_j^{m_i}\cap(A_{j-\delta}\setminus\overline{A}_j)\right].$$

由此知

$$|A_j^{m_i}\setminus(A_j^{m_i}\cap\overline{A}_j)| = |A_j^{m_i}\cap(A_{j-\delta}\setminus\overline{A}_j)| \leqslant |A_{j-\delta}\setminus A_j| \ll 1$$

故结论对于子列 $\{m_i\}$ 成立.

利用反证法可以证明结论对于整个序列也成立. 证毕

**定理 2.5.6**　*假设在 $W_p^1(\Omega)$ 中序列 $\{u_m\}$ 收敛于 $u$, 那么在 $W_p^1(\Omega)$ 中序列 $\{u_m^{(j)}\}$ 收敛于 $u^{(j)}$.*

**证明**　只需证明在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_m^{(j)}$ 收敛于 $Du^{(j)}$.

首先, 由于在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $\{u_m\}$ 收敛于 $u$, 故 $\|u_m\|_{1,p,\Omega}$ 关于 $m$ 有界. 又因为在 $A_j^m$ 上 $Du_m^{(j)} = Du_m$, 在 $\Omega\setminus A_j^m$ 上 $Du_m^{(j)}=0$, 所以 $\|u_m^{(j)}\|_{1,p,\Omega}$ 关于 $m$ 也有界. 把 $|Du_m^{(j)} - Du^{(j)}|^p$ 在 $\Omega$ 上的积分分解成在集合

$$A_j\cap A_j^m,\ A_j\setminus(A_j\cap A_j^m),\ A_j^m\setminus[A_j^m\cap(A_j\cup A_j^\circ)],\ A_j^\circ\cap A_j^m,\ \Omega\setminus(A_j\cup A_j^m)$$

上的积分. 显然, 在最后一个集合上被积函数为零, 在第一个集合上的积分等于

$$\int_{A_j\cap A_j^m}|Du_m-Du|^p\mathrm{d}x\longrightarrow 0.$$

由于

$$\int\limits_{A_j\setminus(A_j\cap A_j^m)}|Du_m^{(j)}-Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x=\int\limits_{A_j\setminus(A_j\cap A_j^m)}|Du|^p\mathrm{d}x,$$

并且 $\lim\limits_{m\to\infty}|A_j\setminus(A_j\cap A_j^m)|=0$ (引理 2.5.1), 所以

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{A_j\setminus(A_j\cap A_j^m)}|Du_m^{(j)}-Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x=0.$$

记 $B_j^m=A_j^m\setminus[A_j^m\cap(A_j\cup A_j^\circ)]$, 那么

$$\begin{aligned}\int_{B_j^m}|Du_m^{(j)}-Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x&=\int_{B_j^m}|Du_m|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant C\left(\int_{B_j^m}|Du_m-Du|^p\mathrm{d}x+\int_{B_j^m}|Du|^p\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

利用

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\Omega}|Du_m - Du|^p\mathrm{d}x = 0,\quad \lim_{m\to+\infty}|B_j^m| = 0\ (\text{引理 } 2.5.1),$$

由上式推知

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{B_j^m}|Du_m^{(j)} - Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x = 0.$$

注意到

$$\int_{A_j^\circ\cap A_j^m}|Du_m^{(j)} - Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_{(A_j^\circ\cup A_j)\cap A_j^m}|Du_m^{(j)} - Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x$$
$$= \int_{(A_j^\circ\cup A_j)\cap A_j^m}|Du_m - Du|^p\mathrm{d}x,$$

同上，有

$$\lim_{m\to\infty}\int_{A_j^\circ\cap A_j^m}|Du_m^{(j)} - Du^{(j)}|^p\mathrm{d}x = 0.$$

定理得证.

**定理 2.5.7**　若 $1\leqslant p<\infty$，$u,v\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$，则 $\max\{u,v\}\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$.

**证明**　因为 $u-v\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$，根据定义，存在 $w_j\in C_0^\infty(\Omega)$，在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $w_j\to u-v$. 利用定理 2.5.6 知，在 $W_p^1(\Omega)$ 中 $w_j^+\to(u-v)^+$.

显然，$w_j^+$ 在 $\Omega$ 内有紧支集，故 $w_j^+\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. 由于 $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ 是 Banach 空间，所以 $(u-v)^+\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. 因而 $\max\{u,v\}=v+(u-v)^+\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. 定理得证.

**推论 2.5.1**　假设 $1\leqslant p<\infty$，$u\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$，那么 $u^+,u^-,|u|\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$.

### 2.5.3　差商和空间 $W_p^1(\Omega)$

研究弱解正则性的一个重要途径是通过研究函数的差商来得到函数的可微性，这种方法也称为差分方法.

**定义 2.5.1** 假设 $\Omega$ 是区域, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ 是局部可积的, 子区域 $\Omega_0 \Subset \Omega$.

(1) 对于 $x \in \Omega_0$ 以及满足 $0 < |h| < \mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ 的 $h \in \mathbb{R}$, 称

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, \quad i = 1, \cdots, n$$

为函数 $u$ 在 $x_i$ 方向具有步长 $h$ 的差商, 其中 $e_i$ 为 $x_i$ 方向的单位向量. 也称 $\Delta_i^h$ 为差商算子;

(2) 定义 $\Delta^h u = (\Delta_1^h u, \cdots, \Delta_n^h u)$.

**定理 2.5.8** 差商算子具有如下性质

(1) $\Delta_i^h$ 的共轭算子 $(\Delta_i^h)^* = -\Delta_i^{-h}$, 即对于任意在 $\Omega$ 内具有紧支集的 $L^2$ 函数 $f$ 和 $g$, 成立

$$\int_\Omega f(x)\Delta_i^h g(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega g(x)\Delta_i^{-h} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 函数乘积的差商可以表示为

$$\Delta_i^h(f(x)g(x)) = T_i^h f(x)\Delta_i^h g(x) + g(x)\Delta_i^h f(x),$$

其中 $T_i^h$ 是 $x_i$ 方向的位移算子, 即 $T_i^h u(x) = u(x+he_i)$.

证明留给读者.

**定理 2.5.9 (差商与弱导数)** 假设 $\Omega$ 是区域, 子区域 $\Omega_0 \Subset \Omega$.

(1) 若 $1 \leqslant p < \infty, u \in W_p^1(\Omega)$, 则

$$\|\Delta^h u\|_{p,\Omega_0} \leqslant n^{1/p}\|Du\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, 0 < |h| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega). \tag{2.5.3}$$

(2) 若 $1 < p < \infty, u \in L^p(\Omega_0)$, 并且存在正常数 $C$ 使

$$\|\Delta^h u\|_{p,\Omega_0} \leqslant C, \quad \forall\, 0 < |h| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega), \tag{2.5.4}$$

那么 $u \in W_p^1(\Omega_0)$ 并且 $\|Du\|_{p,\Omega_0} \leqslant C$.

**证明** (1) 先设 $u\in C^1(\Omega)\cap W_p^1(\Omega)$. 对于 $x\in\Omega_0, i=1,\cdots,n$ 以及 $0<|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega_0,\partial\Omega)$, 我们有

$$u(x+he_i)-u(x)=\int_0^1 D_iu(x+\tau he_i)\mathrm{d}\tau\cdot he_i,$$

从而

$$|u(x+he_i)-u(x)|\leqslant h\int_0^1|Du(x+\tau he_i)|\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}|\Delta_i^hu|^p\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\Omega_0}\int_0^1|Du(x+\tau he_i)|^p\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\int_{\Omega_0}|Du(x+\tau he_i)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\int_{\Omega}|Du(x)|^p\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故有

$$\|\Delta^hu\|_{p,\Omega_0}\leqslant n^{1/p}\|Du\|_{p,\Omega}.$$

再利用逼近知, 上式对于 $u\in W_p^1(\Omega)$ 也成立. 因此式 (2.5.3) 成立.

(2) 假设式 (2.5.4) 成立. 因为 $L^p(\Omega_0)$ 中的有界集是弱紧的, 所以存在序列 $\{h_j\}$ 以及满足 $\|v\|_{p,\Omega_0}\leqslant C$ 的函数 $v\in L^p(\Omega_0)$, 使对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega_0)$, 有

$$\int_{\Omega_0}\phi\Delta_i^{h_j}u\mathrm{d}x\longrightarrow\int_{\Omega_0}v\phi\mathrm{d}x,\quad i=1,\cdots,n.$$

而当 $h_j\longrightarrow 0$ 时

$$\int_{\Omega_0}\phi\Delta_i^{h_j}u\mathrm{d}x=-\int_{\Omega_0}u\Delta_i^{-h_j}\phi\mathrm{d}x\longrightarrow-\int_{\Omega_0}uD_i\phi\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_{\Omega_0}v\phi=-\int_{\Omega_0}uD_i\phi\mathrm{d}x,$$

即 $D_iu=v\in L^p(\Omega_0), i=1,\cdots,n$. 证毕.

类似地可以证明

**定理 2.5.10** 设 $\Omega$ 是区域, 子区域 $\Omega_0 \Subset \Omega$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant i < n$

(1) 若 $u \in W_p^1(\mathbb{R}_+^n \cap \Omega)$, 则当 $0 < |h| \ll 1$ 时, $\Delta_i^h u \in L^p(\mathbb{R}_+^n \cap \Omega_0)$ 并且

$$\|\Delta_i^h u\|_{p,\mathbb{R}_+^n \cap \Omega_0} \leqslant \|D_i u\|_{p,\mathbb{R}_+^n \cap \Omega}.$$

(2) 设 $u \in L^p(\mathbb{R}_+^n \cap \Omega)$, 并且存在正常数 $C$, 使得

$$\|\Delta_i^h u\|_{p,\mathbb{R}_+^n \cap \Omega_0} \leqslant C, \quad \forall\, 0 < |h| \ll 1,$$

那么 $D_i u \in L^p(\mathbb{R}_+^n \cap \Omega_0)$, 并且

$$\|D_i u\|_{p,\mathbb{R}_+^n \cap \Omega_0} \leqslant C.$$

### 2.5.4 Lipschitz 函数和空间 $W_\infty^1(\Omega)$

**定理 2.5.11** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, 那么 $u$ 在 $\Omega$ 中 Lipschitz 连续当且仅当 $u \in W_\infty^1(\Omega)$.

**证明** 因为 $\Omega$ 有界且 $\partial\Omega \in C^1$, 利用延拓定理 2.3.1, 不妨在 $\mathbb{R}^n$ 上讨论并且认为函数 $u$ 具有紧支集.

如果 $u \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 $u$ 的磨光函数 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ 是光滑函数且满足: 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $u^\varepsilon$ 一致收敛于 $u$, 并且 $\|Du^\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leqslant \|Du\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$. 任取 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, 有

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^\varepsilon(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 Du^\varepsilon(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t \cdot (x - y). \end{aligned}$$

因而

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leqslant \|Du^\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}^n}|x - y| \leqslant \|Du\|_{\infty,\mathbb{R}^n}|x - y|.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 可得

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|Du\|_{\infty,\mathbb{R}^n}|x - y|$$

这表明 $u$ 是 Lipschitz 连续的.

反之, 若 $u$ 是 Lipschitz 连续的, 那么

$$\|\Delta_i^{-h}u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leqslant \mathrm{Lip}(u),$$

其中 $\mathrm{Lip}(u)$ 表示 $u$ 的 Lipschitz 常数. 于是存在 $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $h_j \to 0$, 在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\Delta_i^{-h_j}u \rightharpoonup v_i$, 见习题 2.11. 故对任意 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} uD_i\phi dx = \lim_{h_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta_i^{h_j}\phi dx = -\lim_{h_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\phi\Delta_i^{-h_j}u dx = -\int_{\mathbb{R}^n} v_i\phi dx.$$

由此知 $v_i = D_iu$, $u \in W^1_\infty(\mathbb{R}^n)$. 证毕.

当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 与定理 2.5.11 相对应的是下面的定理.

**定理 2.5.12** ([12, 定理 2.1.4])　假设 $u \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, 那么 $u \in W_p^1(\Omega)$ 当且仅当 $u$ 等价于一个在 $\Omega$ 内的几乎所有平行于坐标轴的线段上都是绝对连续的函数 $\bar{u}$, 并且 $\bar{u}$ 的古典导数 (几乎处处存在) 属于 $L^p(\Omega)$.

## 2.6　Sobolev 不等式和 Morrey 不等式

Sobolev 空间理论中的一个基本问题是: 给定一个函数 $u \in W_p^1(\Omega)$, 那么 $u$ 是否自然属于另外的一些空间呢? 回答是肯定的. 但是这些 "另外的空间" 依赖于下面的参数关系

$$1 \leqslant p < n, \quad p = n, \quad n < p \leqslant \infty.$$

我们将在本节的第一部分讨论 $1 \leqslant p < n$ 的情况, 第二部分讨论 $n < p \leqslant \infty$ 的情况, 而把 $p = n$ 的情况放在 2.7 节. 下面两小节介绍的 Sobolev 不等式和 Morrey 不等式都十分重要, 它们是建立嵌入定理的基础.

### 2.6.1　Sobolev 不等式

本小节总假设 $1 \leqslant p < n$, 其目的是证明存在常数 $C$ 和 $q$, 使得

$$\|\phi\|_{q,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|D\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.6.1}$$

为了确定 $q$ 的值, 取函数 $\phi\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi\not\equiv 0$. 对于常数 $\lambda>0$, 做尺度变换 $\phi_\lambda(x)=\phi(\lambda x)\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. 直接计算知

$$\|\phi_\lambda\|_{q,\mathbb{R}^n}=\lambda^{-n/q}\|\phi\|_{q,\mathbb{R}^n},\quad \|D\phi_\lambda\|_{p,\mathbb{R}^n}=\lambda^{1-n/p}\|D\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

把估计式 (2.6.1) 用于 $\phi_\lambda$ 得

$$\|\phi\|_{q,\mathbb{R}^n}\leqslant C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|D\phi\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

如果 $1-n/p+n/q\neq 0$. 令 $\lambda\to 0^+$ 或者 $\lambda\to\infty$, 总可以导出矛盾. 因此 $q=np/(n-p)$. 记 $p^*=np/(n-p)$, 称之为 $p$ 的 Sobolev 共轭指数, 有时也简称为 Sobolev 指数.

**定理 2.6.1** *设 $1\leqslant p<n$, 则存在正常数 $C(n,p)$, 使得*

$$\|u\|_{q,\mathbb{R}^n}\leqslant C(n,p)\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n},\quad \forall\, u\in C_0^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.6.2}$$

*当且仅当 $q=p^*=np/(n-p)$. 此外, 当 $q=p^*$ 时, 还可以取 $C(n,p)=\frac{p(n-1)}{2(n-p)}$.*

**证明** 必要性的证明已经在上面的讨论中给出. 下面证明充分性.

(1) 首先讨论 $p=1$ 的情况. 因为 $u$ 具有紧支集, 所以对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_i}D_iu(x)\mathrm{d}x_i=-\int_{x_i}^{\infty}D_iu(x)\mathrm{d}x_i,\quad 2|u(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|Du(x)|\,\mathrm{d}x_i.$$

于是

$$|2u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\leqslant\prod_{i=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}}|Du(x)|\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

两边关于 $x_1$ 积分, 并利用 Holder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|2u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x_1&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}}|Du|\,\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x_1\\&=\left(\int_{\mathbb{R}}|Du|\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=2}^n\left(\int_{\mathbb{R}}|Du|\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x_1\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|Du|\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^n\int_{\mathbb{R}^2}|Du|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

此不等式两边关于 $x_2$ 积分得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |2u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} |Du| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{I}_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \mathrm{I}_i^{\frac{1}{n-1}}\right) \mathrm{d}x_2$$

其中

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\mathbb{R}} |Du| \mathrm{d}x_1, \quad \mathrm{I}_i = \int_{\mathbb{R}^2} |Du| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_i, \quad i = 3, \cdots, n$$

再利用 Hölder 不等式便推知

$$\int_{\mathbb{R}^2} |2u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} |Du| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |Du| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

依次关于 $x_3, \cdots, x_n$ 积分, 最后得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |2u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{2.6.3}$$

结论成立.

(2) 对于 $1 < p < n$ 的情况, 把估计式 (2.6.3) 用于函数 $v := |u|^r$, 这里的 $r > 1$ 待定, 就有

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{rn}{n-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^r| \mathrm{d}x \\
&= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{r-1} |Du| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{r}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(r-1)\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

取 $r$ 满足 $rn/(n-1) = (r-1)p/(p-1)$, 即 $r = p(n-1)/(n-p) > 1$ 那么

$$\frac{rn}{n-1} = (r-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*.$$

对于这样确定的 $r$, 从估计式 (2.6.4) 便可推出估计式 (2.6.2), 其中 $C(n,p) = r/2 = p(n-1)/[2(n-p)]$. 证毕.

定理 2.6.1 可以推广到空间 $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ 即

**定理 2.6.2** 设 $k$ 是正整数, $1 \leqslant kp < n$, 则存在正常数 $C(n,k,p)$, 使得

$$\|u\|_{q,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k,p)\|D^k u\|_{p,\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

当且仅当 $q = np/(n-kp)$, 这里

$$\|D^k u\|_{p,\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

证明留作习题

**定理 2.6.3** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p < n$, 则存在正常数 $C(n,p,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{p^*,\Omega} \leqslant C(n,p,\Omega)\|u\|_{1,p,\Omega}, \quad \forall\, u \in W_p^1(\Omega), \tag{2.6.5}$$

其中 $p^* = np/(n-p)$.

**证明** 因为 $\partial\Omega \in C^1$, 根据延拓定理 2.3.1, 存在 $\overline{u} = Eu \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, 满足:

$$\overline{u}|_\Omega = u, \ \overline{u} \text{ 有紧支集, 并且 } \|\overline{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p,\Omega)\|u\|_{1,p,\Omega} \tag{2.6.6}$$

利用定理 1.5.1 的结论 (5) 和逼近定理 2.2.1 知, $u_j = \eta_{1/j} * \overline{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且在 $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_j \to \overline{u}$. 利用定理 2.6.1 又知, $\|u_j - u_i\|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p)\|Du_j - Du_i\|_{p,\mathbb{R}^n}$. 由此推出, 在 $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_j \to \overline{u}$. 又因为 $\|u_j\|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p)\|Du_j\|_{p,\mathbb{R}^n}$, 所以

$$\|\overline{u}\|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p)\|D\overline{u}\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

此不等式结合式 (2.6.6), 便得出估计式 (2.6.5). 证毕

### 2.6.2 Morrey 不等式

本小节总假设 $n < p \leqslant \infty$.

**定理 2.6.4**　设 $n < p \leqslant \infty$, $\alpha = 1 - n/p$. 那么

$$|u|_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p)\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n},\quad \forall\, u \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

**证明**　第一步　对于 $\rho > 0$, 取球 $B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^n$. 先证明存在 $C = C(n)$, 使得

$$\fint_{B_\rho(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y := \frac{1}{|B_\rho(x)|}\int_{B_\rho(x)} |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant C\int_{B_\rho(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y. \tag{2.6.7}$$

事实上, 对于任意的 $z \in \partial B_1$, 当 $0 < t < \rho$ 时,

$$\begin{aligned}|u(x+tz) - u(x)| &= \left|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(x+sz)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_0^t Du(x+sz)\cdot z\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^t |Du(x+sz)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1} |u(x+tz) - u(x)|\,\mathrm{d}S_z &\leqslant \int_0^t\int_{\partial B_1} |Du(x+sz)|\mathrm{d}S_z\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t\int_{\partial B_1} |Du(x+sz)|\frac{s^{n-1}}{s^{n-1}}\mathrm{d}S_z\mathrm{d}s\end{aligned}$$

令 $y = x + sz$, 则 $s = |x-y|$. 从而

$$\int_{\partial B_1} |u(x+tz) - u(x)|\mathrm{d}S_z \leqslant \int_{B_t(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y \leqslant \int_{B_\rho(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y$$

上式两边同乘以 $t^{n-1}$, 再关于 $t$ 从 0 到 $\rho$ 积分得

$$\int_{B_\rho(x)} |u(y) - u(x)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{\rho^n}{n}\int_{B_\rho(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y$$

此式即为式 (2.6.7).

第二步 我们只讨论 $p<\infty$ 的情况. 对于 $p=\infty$ 的情况, 证明更简单. 固定 $x\in\mathbb{R}^n$. 因为 $(n-1)p/(p-1)<n$, 利用不等式 (2.6.7) 以及 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leqslant ⨍_{B_1(x)}|u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}y+⨍_{B_1(x)}|u(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\int_{B_1(x)}\frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y+C\|u\|_{L^p(B_1(x))}\\
&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_1(x)}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+C\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}\\
&\leqslant C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}
$$

再由 $x$ 的任意性知

$$
\sup_{\mathbb{R}^n}|u|\leqslant C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}. \tag{2.6.8}
$$

第三步 任取两个点 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 记 $\rho=|x-y|$, $O=B_\rho(x)\bigcap B_\rho(y)$. 则有

$$
|u(x)-u(y)|\leqslant\frac{1}{|O|}\int_O|u(x)-u(z)|\mathrm{d}z+\frac{1}{|O|}\int_O|u(y)-u(z)|\mathrm{d}z. \tag{2.6.9}
$$

利用不等式 (2.6.7), 同于第二步的证明可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|O|}\int_O|u(x)-u(z)|\mathrm{d}z &\leqslant C\frac{1}{|B_\rho(x)|}\int_{B_\rho(x)}|u(x)-u(z)|\mathrm{d}z\\
&\leqslant C\left(\int_{B_\rho(x)}|Du|^p\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_\rho(x)}\frac{\mathrm{d}z}{|x-z|^{\frac{(n-1)p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leqslant C\rho^\alpha\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n},
\end{aligned} \tag{2.6.10}
$$

这里 $\alpha=1-n/p$. 同理,

$$
\frac{1}{|O|}\int_O|u(y)-u(z)|\mathrm{d}z\leqslant C\rho^\alpha\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}.
$$

把此估计式以及式 (2.6.10) 代入式 (2.6.9) 便有

$$
|u(x)-u(y)|\leqslant C\rho^\alpha\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}=C|x-y|^\alpha\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}.
$$

因此,

$$[u]_{\alpha,\mathbb{R}^n} = \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

此不等式结合式 (2.6.8) 就给出所要的结果. 证毕.

**注 2.6.1** 上面的证明也给出了如下结果: 若 $n<p\leqslant\infty$, 则

$$|u(y)-u(x)|\leqslant C(n,p)\rho^{1-n/p}\left(\int_{B_{2\rho}(x)}|Du(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p} \tag{2.6.11}$$

对所有的 $u\in C^1(B_{2\rho}(x))$, $y\in B_\rho(x)$ 成立. 再利用逼近知, 上式对于 $u\in W_p^1(B_{2\rho}(x))$ 也成立.

利用估计式 (2.6.11) 可以推出 $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 函数的几乎处处可微性.

**定理 2.6.5** 设 $n<p\leqslant\infty$, $u\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, 那么 $u$ 在 $\Omega$ 内是几乎处处古典可微的, 并且其古典导数与弱导数几乎处处相等.

**证明** 由于 $W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)\subset W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 对于所有的 $p>n$ 成立, 所以只需考虑 $n<p<\infty$ 的情形. 对于 $u\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, 利用 Lebesgue 微分定理 (定理 A.1) 知, 对于几乎所有的 $x\in\Omega$,

$$\lim_{\rho\to 0}\fint_{B_\rho(x)}|Du(x)-Du(z)|^p\mathrm{d}z = 0, \tag{2.6.12}$$

这里 $Du$ 表示 $u$ 的弱导数. 对于这样的 $x$, 令

$$v(y)=u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x),$$

并记 $\rho=|x-y|$. 那么, 当 $0<\rho\ll 1$ 时 $v(y)\in W_p^1(B_{2\rho}(x))$. 因为 $v(x)=0$, 先利用估计式 (2.6.11) 再利用极限 (2.6.12) 得

$$\begin{aligned}|u(y)-u(x)-Du(x)\cdot(y-x)| &= |v(y)-v(x)|\\ &\leqslant C\rho^{1-n/p}\left(\int_{B_{2\rho}(x)}|Du(x)-Du(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\\ &\leqslant C\rho\left(\fint_{B_{2\rho}(x)}|Du(x)-Du(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\\ &= o(\rho)=o(|x-y|).\end{aligned}$$

这表明 $u$ 在点 $x$ 处是可微的, 并且其弱导数 $Du(x)$ 就是古典导数. 证毕.

**定理 2.6.6** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, $n < p \leqslant \infty$, 则存在正常数 $C = C(n, p, \Omega)$, 使得对任意的 $u \in W_p^1(\Omega)$, 改变 $u$ 在零测集上的值之后, $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha = 1 - n/p$, 并且还有

$$|u|_{\alpha,\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}. \tag{2.6.13}$$

**证明** 设 $u \in W_p^1(\Omega)$. 因为 $\partial\Omega \in C^1$, 根据延拓定理 2.3.1, 存在 $\overline{u} = Eu \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ 满足式 (2.6.6). 由定理 1.5.1 的结论 (5) 和逼近定理 2.2.1 知, $u_m = \eta_{1/m} * \overline{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在 $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_m \longrightarrow \overline{u}$. 再由定理 2.6.4 知, $|u_m - u_j|_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u_m - u_j\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$. 于是存在 $u^* \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 在 $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_m \longrightarrow u^*$. 由极限的唯一性知, 在 $\Omega$ 上, $u = \overline{u} = u^*$ 几乎处处成立. 又因为 $|u_m|_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u_m\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$, 所以

$$|u|_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|\overline{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^n}.$$

此式结合式 (2.6.6) 就得到所要的估计式 (2.6.13). 证毕.

### 2.6.3 Morrey 空间, Riesz 位势与 Hölder 连续函数

定理 2.6.6 仅保证了当 $p > n$ 时, $W_p^1(\Omega)$ 中的函数是 Hölder 连续的. Morrey 发现, 当 $p < n$ 时, 如果 $W_p^1(\Omega)$ 中的函数再有一些其他性质, 也是 Hölder 连续的.

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 称函数 $f \in M^p(\Omega)$, 若存在正常数 $K$, 使得对任意的 $R > 0$ 及任意球 $B_R$, 都有

$$\int_{\Omega\cap B_R} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant KR^{n(1-1/p)}.$$

$M^p(\Omega)$ 称为 Morrey 空间. 对于 $f \in M^p(\Omega)$, 定义

$$\|f\|_{M^p(\Omega)} = \inf\left\{K : \frac{1}{R^{n(1-1/p)}}\int_{\Omega\cap B_R} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant K, \ \forall B_R\right\}.$$

对于 $\mu\in(0,1]$ 和 $f\in L^1(\Omega)$, 定义 $f$ 的 Riesz 位势

$$(V_\mu f)_\Omega(x)=\int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)}f(y)\mathrm{d}y,\quad x\in\Omega.$$

**引理 2.6.1**　设 $\Omega$ 有界, $f\in M^p(\Omega)$, $\sigma=p^{-1}<\mu$, 那么

$$|(V_\mu f)_\Omega(x)|\leqslant \frac{1-\sigma}{\mu-\sigma}d^{n(\mu-\sigma)}\|f\|_{M^p(\Omega)},\quad \forall\, x\in\Omega,$$

其中 $d=\mathrm{diam}(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 的直径.

**证明**　把 $f$ 零延拓到 $\Omega$ 之外, 并定义

$$v(\rho)=\int_{B_\rho(x)}|f(y)|\mathrm{d}y=\int_0^\rho\int_{|y-x|=r}|f(y)|\mathrm{d}S_y\mathrm{d}r,$$

那么, $v'(\rho)=\int_{|y-x|=\rho}|f(y)|\mathrm{d}S_y$,

$$\begin{aligned}
|(V_\mu f)_\Omega(x)| &\leqslant \int_\Omega \rho^{n(\mu-1)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&=\int_{B_d(x)}\rho^{n(\mu-1)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&=\int_0^d \rho^{n(\mu-1)}\mathrm{d}\rho\int_{|y-x|=\rho}|f(y)|\mathrm{d}S_y\\
&=\int_0^d \rho^{n(\mu-1)}v'(\rho)\mathrm{d}\rho\\
&=d^{n(\mu-1)}v(d)+n(1-\mu)\int_0^d \rho^{n(\mu-1)-1}v(\rho)\mathrm{d}\rho\\
&\leqslant d^{n(\mu-\sigma)}\|f\|_{M^p(\Omega)}+n(1-\mu)\|f\|_{M^p(\Omega)}\int_0^d \rho^{n(\mu-\sigma)-1}\mathrm{d}\rho\\
&=\frac{1-\sigma}{\mu-\sigma}d^{n(\mu-\sigma)}\|f\|_{M^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

**引理 2.6.2**　设 $\Omega$ 是有界凸区域, $u\in W_1^1(\Omega)$, 那么

$$|u(x)-u_S|\leqslant \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du(y)|\mathrm{d}y,\quad \text{a.e. } x\in\Omega,\qquad (2.6.14)$$

其中 $d=\mathrm{diam}(\Omega)$, $S$ 是 $\Omega$ 的任意可测子集, $u_S=⨍_S u(x)\mathrm{d}x$.

**证明** 先考虑 $u \in C^1(\Omega)\bigcap W_1^1(\Omega)$ 的情况. 此时, 显然有

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} D_r u(x+r\omega)\mathrm{d}r, \quad x, y \in \Omega.$$

关于 $y$ 在 $S$ 上积分得

$$|S|(u(x) - u_S) = -\int_S \mathrm{d}y \int_0^{|x-y|} D_r u(x+r\omega)\mathrm{d}r.$$

定义

$$V(x+r\omega) = \begin{cases} |D_r u(x+r\omega)|, & x+r\omega \in \Omega, \\ 0, & x+r\omega \notin \Omega, \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leqslant \frac{1}{|S|}\int_{|x-y|<d} \mathrm{d}y \int_0^\infty V(x+r\omega)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{|S|}\int_0^\infty \int_{|\omega|=1}\int_0^d V(x+r\omega)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r \\ &= \frac{d^n}{n|S|}\int_0^\infty \int_{|\omega|=1} V(x+r\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r \\ &= \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega |x-y|^{1-n}|D_r u(y)|\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

再考虑 $u \in W_1^1(\Omega)$ 的情况. 由定理 2.2.3, 存在 $u_j \in C^1(\Omega)\bigcap W_1^1(\Omega)$, 在 $W_1^1(\Omega)$ 中 $u_j \longrightarrow u$. 对于 $u_j$, 有

$$|u_j(x) - (u_j)_S| \leqslant \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du_j(y)|\mathrm{d}y, \quad \forall\, x \in \Omega \tag{2.6.15}$$

利用习题 2.14 知

$$\left\|\int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du_j(y) - Du(y)|\,\mathrm{d}y\right\|_{1,\Omega} \leqslant C\|Du_j - Du\|_{1,\Omega} \longrightarrow 0.$$

这说明在 $L^1(\Omega)$ 中

$$\int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du_j(y)|\,\mathrm{d}y \longrightarrow \int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du(y)|\,\mathrm{d}y$$

当然在 $\Omega$ 内也几乎处处收敛. 又因为 $u_j$ 几乎处处收敛于 $u$. 在不等式 (2.6.15) 中令 $j \longrightarrow \infty$ 便得不等式 (2.6.14). 引理得证.

**定理 2.6.7**　设 $\Omega$ 有界，$u \in W_1^1(\Omega)$，并且存在正常数 $K$ 和 $\alpha \leqslant 1$，使得对任意 $r > 0$ 及 $B_r \subset \Omega$ 都有

$$\int_{B_r} |Du| \mathrm{d}x \leqslant K r^{n-1+\alpha}, \tag{2.6.16}$$

那么当 $\alpha < 1$ 时 $u \in C^{\alpha}(\Omega)$，当 $\alpha = 1$ 时 $u \in C^{0,1}(\Omega)$ (局部 Lipschitz 连续函数空间)，并且对于任意球 $B_r \subset \Omega$，都有

$$\operatorname*{Osc}_{B_r} u := \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u \leqslant C K r^{\alpha}.$$

**证明**　当 $\alpha < 1$ 时，取 $p = n/(1-\alpha)$，当 $\alpha = 1$ 时，取 $p = \infty$。条件 (2.6.16) 说明 $Du \in M^p(\Omega)$。取 $\mu = 1/n$，那么 $1/p < \mu$。对于任意的球 $B_r \subset \Omega$，利用引理 2.6.1 得

$$|(V_\mu Du)_{B_r}(x)| \leqslant \frac{1-\sigma}{\mu-\sigma} r^{n(\mu-\sigma)} \|Du\|_{M^p(B_r)} \leqslant C K r^{\alpha}, \quad \forall x \in \Omega,$$

其中 $\sigma = 1/p$，即

$$\int_{B_r} |x-y|^{1-n} |Du(y)| \mathrm{d}y \leqslant C K r^{\alpha}.$$

此式结合式 (2.6.14) 又得 (取 $S = \Omega = B_r$)

$$|u(x) - u_{B_r}| \leqslant \frac{r^n}{n|B_r|} \int_{B_r} |x-y|^{1-n} |Du(y)| \mathrm{d}y \leqslant C K r^{\alpha}, \quad \text{a.e. } x \in B_r.$$

于是

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |u(x) - u_{B_r}| + |u(y) - u_{B_r}| \leqslant C K r^{\alpha}, \quad \text{a.e. } x \in B_r.$$

因此，对于几乎所有的 $x, y \in \Omega$，只要 $x \neq y$ 并且 $B_{|x-y|}(x) \subset \Omega$，由上式即得

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}.$$

定理得证

## 2.7 空间 $W_p^k(\Omega)$ 中的嵌入定理

我们将把上节的结果推广到一般情形. 所得结果通常被称为嵌入定理或 Sobolev 嵌入定理, 又被称为广义 Sobolev 不等式. 正是由于 Sobolev 空间的嵌入性质, 使得 Sobolev 空间在分析学、尤其是在微分方程和积分方程的研究中有非常重要的应用.

为了证明上的方便, 在本节和下一节, 我们只针对性质 "比较好" 的开集 $\Omega$ 来研究空间 $W_p^k(\Omega)$ 和 $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ 的嵌入, 而对于一般开集的情况, 请参见第 2.13 节.

**定义 2.7.1** 设 $X$ 和 $Y$ 都是 Banach 空间. 称 $X$ 嵌入到 $Y$, 记为 $X \hookrightarrow Y$, 如果 $X$ 可以被视为 $Y$ 的子空间, 并且存在只依赖于空间 $X$ 和 $Y$ 的正常数 $C$, 使得

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X.$$

这里的 $C$ 通常被称为嵌入常数.

设 $k$ 是非负整数, 记

$$C_b^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 上有界}, \ \forall\, |\alpha| \leqslant k\right\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{C_b^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u|,$$

那么 $C_b^k(\Omega)$ 是 Banach 空间. 显然有

$$C^k(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C_b^k(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega).$$

**定理 2.7.1** 假设 $n = 1$.

(1) 当 $\Omega$ 有界时, $W_1^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

(2) 当 $\Omega$ 无界且是有限多个开区间的并集时, $W_1^1(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega) = C_b^0(\Omega)$.

(3) 当 $\Omega$ 无界且是无限多个开区间的并集时, $W_1^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$, 但是不一定有 $W_1^1(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega)$.

例如，取 $\Omega=\bigcup_{j\geqslant 2}(j,j+2j^{-3})$，

$$u(x)=\begin{cases} j, & x\in(j,j+j^{-3}],\\ 2j+j^{-3}-x, & x\in(j+j^{-3},j+2j^{-3}),\end{cases}$$

那么 $u$ 的一阶弱导数存在，并且

$$Du(x)=\begin{cases} 0, & x\in(j,j+j^{-3}],\\ -1, & x\in(j+j^{-3},j+2j^{-3}).\end{cases}$$

显然，$u\in W_1^1(\Omega)$，但是 $u$ 无界.

证明留作习题.

**定理 2.7.2**　设 $\Omega$ 有界，$\partial\Omega\in C^1$，$p\geqslant 1$，$k$ 是正整数.

(1) 当 $kp<n$ 时，对任意的 $1\leqslant q\leqslant np/(n-kp)$，有 $W_p^k(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$，其中嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p,q,\Omega$；

(2) 当 $kp=n$ 时，对任意的 $1\leqslant q<\infty$，有 $W_p^k(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$，其中嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,p,q,\Omega$；

(3) 当 $kp>n$ 时，$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$，其中

$$\alpha\leqslant\alpha_0=\begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right]+1-\dfrac{n}{p}, & \text{如果 } n/p \text{ 不是整数},\\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } n/p \text{ 是整数},\end{cases}$$

并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p,\alpha,\Omega$.

**证明**　假设 $u\in W_p^k(\Omega)$.

(1) 因为 $D^\beta u\in W_p^1(\Omega)$ 对所有 $|\beta|\leqslant k-1$ 成立，由定理 2.6.3 得

$$\|D^\beta u\|_{p^*,\Omega}\leqslant C\|D^\beta u\|_{1,p,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega},\quad\forall\ |\beta|\leqslant k-1,$$

这里 $p^*=np/(n-p)$，故有 $u\in W_{p^*}^{k-1}(\Omega)$，并且

$$\|u\|_{W_{p^*}^{k-1}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}.$$

类似可得 $u\in W_{p_2}^{k-2}(\Omega)$，并且

$$\|u\|_{k-2,p_2,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega},$$

其中

$$\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p^*}-\frac{1}{n}=\frac{1}{p}-\frac{2}{n}.$$

重复以上过程 $k$ 次, 最后得到 $u\in L^{q_k}(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_{q_k,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}$$

成立, 其中 $q_k=np/(n-kp)$. 又因为 $|\Omega|<\infty$, 所以

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|u\|_{q_k,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}.$$

(2) 当 $n=1$ 时, 由定理 2.7.1 知结论成立. 下面考虑 $n\geqslant 2$ 的情况.

若 $k=1$, 则 $p=n\geqslant 2$. 对任何 $1\leqslant q<\infty$, 存在 $r$ 满足 $1<r<p$ 及 $q\leqslant nr/(n-r)$. 显然有, $W_p^1(\Omega)\hookrightarrow W_r^1(\Omega)$, $\|u\|_{1,r,\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}$. 而由结论 (1) 又知, $W_r^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\|u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,r,\Omega}$.

如果 $k\geqslant 2$, 那么 $p(k-1)<n$ 并且 $u, Du\in W_p^{k-1}(\Omega)$. 利用结论 (1) 知

$$u, Du\in L^r(\Omega),\quad \|u\|_{1,r,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega},\ \forall\, 1\leqslant r\leqslant\frac{np}{n-(k-1)p}=n.$$

同上, 对于任何 $1\leqslant q<\infty$, 存在 $r$ 满足 $1<r<n$ 及 $q\leqslant nr/(n-r)$. 由结论 (1) 知, $W_r^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\|u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,r,\Omega}$.

(3) 先讨论 $n/p$ 不是整数的情形. 同上可知, 只要 $lp<n$ ($l$ 是正整数), 就有

$$u\in W_r^{k-l}(\Omega),\quad r=np/(n-lp). \tag{2.7.1}$$

取 $l=[\frac{n}{p}]$, 则 $r>n$. 从而由 (2.7.1) 式和定理 2.6.6 知

$$D^\beta u\in C^{1-n/r}(\overline{\Omega}),\quad \forall\, |\beta|\leqslant k-l-1.$$

因为

$$1-\frac{n}{r}=1-\frac{n}{p}+l=\left[\frac{n}{p}\right]+1-\frac{n}{p},$$

所以

$$u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\ [\frac{n}{p}]+1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$$

再讨论 $n/p$ 是整数的情形. 取 $l = n/p - 1$. 同上, $u \in W_r^{k-l}(\Omega)$, 其中 $r = np/(n-lp) = n$. 由本定理的结论 (2) 知

$$D^\beta u \in L^q(\Omega), \quad \forall\, n < q < \infty, \quad |\beta| \leqslant k - l - 1 = k - n/p.$$

再利用定理 2.6.6 又推出

$$D^\beta u \in C^{1-n/q}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, n < q < \infty, \quad |\beta| \leqslant k - n/p - 1$$

因此

$$u \in C^{k-\frac{n}{p}-1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, 0 < \alpha < 1.$$

最后, 估计式

$$|u|_{k-[\frac{n}{p}]-1+\alpha} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}, \quad \forall\, u \in W_p^k(\Omega)$$

可从每一步的相应估计推出 (参阅定理 2.6.3 和定理 2.6.6 的证明).

请读者自己检验每一种情况下嵌入常数 $C$ 关于参数的依赖性.

**定理 2.7.3** 设 $\Omega$ 有界, $p \geqslant 1$, $k$ 是正整数.

(1) 当 $kp < n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q \leqslant np/(n-kp)$, 有 $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, q, \Omega$;

(2) 当 $kp = n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q < \infty$, 有 $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, p, q, \Omega$;

(3) 当 $kp > n$ 时, $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 其中

$$0 < \alpha \leqslant \alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } n/p \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } n/p \text{ 是整数}, \end{cases}$$

并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, \alpha, \Omega$.

应用时, 需要注意定理 2.7.2 及定理 2.7.3 关于 $\partial\Omega$ 的光滑性的差别.

注意到定理 2.3.2 的 (1), 同于上面的讨论, 我们有

**定理 2.7.4** 假定 $p \geqslant 1$, $k$ 是正整数.

(1) 当 $kp < n$ 时, 对任意的 $p \leqslant q \leqslant np/(n-kp)$, 有 $W_p^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$;

(2) 当 $kp = n$ 时, 对任意的 $p \leqslant q < \infty$, 有 $W_p^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$;

(3) 当 $kp > n$ 时, $W_p^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, 其中

$$0 < \alpha \leqslant \alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } n/p \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } n/p \text{ 是整数}. \end{cases}$$

这里的嵌入常数 $C$ 同于定理 2.7.2.

定理 2.7.3 和定理 2.7.4 的证明留作习题.

## 2.8 空间 $W_p^k(\Omega)$ 中的紧嵌入定理

Sobolev 空间的紧嵌入定理, 为研究函数列的收敛性提供了重要工具, 在分析学中有非常重要的应用.

**定义 2.8.1** 设 $X$ 和 $Y$ 都是 Banach 空间. 称 $X$ 紧嵌入到 $Y$, 记为 $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, 如果 $X \hookrightarrow Y$, 且 $X$ 中的任一有界集在 $Y$ 中都有收敛的子列, 即在 $Y$ 中是准紧的.

我们先讨论 $W_p^1(\Omega)$ 的紧嵌入定理.

**定理 2.8.1** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p < n$, 则

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, 1 \leqslant q < p^* = np/(n-p).$$

**证明** 第一步 固定 $1 \leqslant q < p^*$. 注意到 $\Omega$ 有界, 由定理 2.6.3 得

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \|u\|_{q,\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}.$$

余下的是证明 $W_p^1(\Omega)$ 中的任一有界列 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 在 $L^q(\Omega)$ 中都有收敛的子列.

第二步 利用延拓定理, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上来讨论, 并且认为对所有 $m$, 都有 $\mathrm{spt}\{u_m\} \Subset \Omega_0$, 其中 $\Omega_0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界集. 还可以假设

$$\sup_m \|u_m\|_{1,p,\Omega_0} < \infty. \tag{2.8.1}$$

考察光滑函数列

$$u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m, \quad \varepsilon > 0, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

同样可以假设 $\mathrm{spt}\{u_m^\varepsilon\} \Subset \Omega_0$. 再利用注 1.5.1 的 (2) 以及式 (2.2.1) 和式 (2.8.1), 可得

$$\sup_m \|u_m^\varepsilon\|_{1,p,\Omega_0} \leqslant \sup_m \|u_m\|_{1,p,\Omega_0} < \infty. \tag{2.8.2}$$

我们断言, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ 时,

$$u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m \quad 在\ L^q(\Omega_0)\ 中关于\ m\ 一致成立. \tag{2.8.3}$$

事实上, 当 $u_m$ 是光滑函数时, 有

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B_1} \eta(y)[u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x)]\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1} \eta(y) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_m(x - \varepsilon t y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon \int_{B_1} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x - \varepsilon t y) \cdot y\mathrm{d}t\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \varepsilon \int_{B_1} \eta(y) \int_0^1 \int_{\Omega_0} |Du_m(x - \varepsilon t y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\Omega_0} |Du_m(z)|\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

利用逼近知, 上式对于 $u_m \in W_p^1(\Omega)$ 也成立. 因为 $\Omega_0$ 有界, 所以

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{1,\Omega_0} \leqslant \varepsilon\|Du_m\|_{1,\Omega_0} \leqslant \varepsilon C\|Du_m\|_{p,\Omega_0}$$

根据式 (2.8.1) 又推出, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时,

$$u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m \text{ 在 } L^1(\Omega_0) \text{ 中关于 } m \text{ 一致成立} \tag{2.8.4}$$

对于 $1 < q < p^*$, 运用 $L^p$ 空间的内插不等式, 我们有

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{q,\Omega_0} \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{1,\Omega_0}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*,\Omega_0}^{1-\theta},$$
$$\theta = \frac{p^* - q}{q(p^* - 1)} \in (0, 1)$$

于是由定理 2.6.3, 以及式 (2.8.1) 和式 (2.8.2) 得

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{q,\Omega_0} \leqslant C\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{1,\Omega_0}^\theta,$$

这里的常数 $C$ 与 $\varepsilon$ 无关. 该不等式结合事实 (2.8.4) 就推出断言 (2.8.3).

第三步 证明

$$\text{对任意固定的 } \varepsilon > 0, \text{序列 } \{u_m^\varepsilon\} \text{ 一致有界且等度连续} \tag{2.8.5}$$

事实上, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\begin{aligned}
|u_m^\varepsilon(x)| &\leqslant \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y)|u_m(y)|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\|u_m\|_{1,\Omega_0} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-n}, \\
|Du_m^\varepsilon(x)| &\leqslant \int_{B_\varepsilon(x)} |D\eta_\varepsilon(x - y)||u_m(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|D\eta_\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\|u_m\|_{1,\Omega_0} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

从而结论 (2.8.5) 成立.

**第四步** 固定 $\delta > 0$. 先证明存在 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_{m_r}\}$, 使得

$$\limsup_{r,h\to\infty} \|u_{m_r} - u_{m_h}\|_{q,\Omega_0} \leqslant \delta. \tag{2.8.6}$$

根据式 (2.8.3), 可取 $\varepsilon > 0$ 适当小, 使得

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{q,\Omega_0} \leqslant \delta/3, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{2.8.7}$$

固定 $\varepsilon$. 因为 $\mathrm{spt}\{u_m\} \Subset \Omega_0$, $\mathrm{spt}\{u_m^\varepsilon\} \Subset \Omega_0$, 并注意到结论 (2.8.5), 利用 Arzela-Ascoli 定理知, 存在 $\{u_m^\varepsilon\}$ 的子序列 $\{u_{m_r}^\varepsilon\}$ 在 $\Omega_0$ 上一致收敛. 特别地,

$$\limsup_{r,h\to\infty} \|u_{m_r}^\varepsilon - u_{m_h}^\varepsilon\|_{q,\Omega_0} = 0.$$

此事实结合不等式 (2.8.7), 便可推出不等式 (2.8.6).

分别对 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 应用不等式 (2.8.6), 再运用标准的对角线方法可知, 存在 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_{m_i}\}$, 使得

$$\limsup_{i,j\to\infty} \|u_{m_i} - u_{m_j}\|_{q,\Omega_0} = 0.$$

定理得证.

现在讨论 $W_p^k(\Omega)$ 的紧嵌入定理.

**定理 2.8.2** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, $k$ 是正整数. $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(1) 当 $kp < n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q < np/(n-kp)$, 有 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, q, \Omega$;

(2) 当 $kp = n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q < \infty$, 有 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, p, q, \Omega$;

(3) 当 $kp > n$ 时, 对任意的 $0 < \alpha < \alpha_0$, 有 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 其中

$$\alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } n/p \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } n/p \text{ 是整数}, \end{cases}$$

并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, \alpha, \Omega$.

**定理 2.8.3** 设 $\Omega$ 有界，$k$ 是正整数，$1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(1) 当 $kp < n$ 时，对任意的 $q < np/(n-kp)$，有 $\mathring{W}^k_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$，并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p,q,\Omega$;

(2) 当 $kp = n$ 时，对任意的 $1 \leqslant q < \infty$，有 $\mathring{W}^k_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$，并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,p,q,\Omega$;

(3) 当 $kp>n$ 时，对任意的 $0<\alpha<\alpha_0$，有 $\mathring{W}^k_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\alpha}(\bar{\Omega})$，其中

$$\alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } n/p \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } n/p \text{ 是整数}, \end{cases}$$

并且嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p,\alpha,\Omega$.

这两个定理的证明留作习题.

## 2.9 Poincaré 不等式

**定理 2.9.1** 设 $1 \leqslant p < n$，并记 $p^* = np/(n-p)$，那么

$$\|u\|_{p^*,\Omega} \leqslant C(n,p)\|Du\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathring{W}^1_p(\Omega). \tag{2.9.1}$$

特别地，当 $|\Omega| < \infty$ 时，有

$$\|u\|_{q,\Omega} \leqslant C(n,p,q,\Omega)\|Du\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathring{W}^1_p(\Omega), \quad 1 \leqslant q < p^*. \tag{2.9.2}$$

当 $\Omega$ 有界时，有

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant 2n^{-1/p}\mathrm{diam}(\Omega)\|Du\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathring{W}^1_p(\Omega). \tag{2.9.3}$$

**证明** 因为 $u \in \mathring{W}^1_p(\Omega)$，所以存在 $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$，在 $W^1_p(\Omega)$ 中 $u_j \to u$. 把 $u_j$ 零延拓到 $\bar{\Omega}$ 的外部，则 $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 应用定理 2.6.1 知,

$$\|u_j\|_{p^*,\Omega} = \|u_j\|_{p^*,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,p)\|Du_j\|_{p,\mathbb{R}^n} = C(n,p)\|Du_j\|_{p,\Omega},$$

$$\|u_j - u_i\|_{p^*,\Omega} \leqslant C(n,p)\|Du_j - Du_i\|_{p,\Omega} \longrightarrow 0.$$

这说明在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中 $u_j \to u$. 故 $\|u\|_{p^*,\Omega} \leqslant C(n,p)\|Du\|_{p,\Omega}$.

如果 $|\Omega| < \infty$, 那么当 $1 \leqslant q < p^*$ 时, $\|u\|_{q,\Omega} \leqslant C(n,p,q,\Omega)\|u\|_{p^*,\Omega}$. 再利用不等式 (2.9.1) 知, 不等式 (2.9.2) 成立.

下面证明当 $\Omega$ 有界时, 估计式 (2.9.3) 成立. 记 $d = \mathrm{diam}(\Omega)$. 不妨认为 $\bar{\Omega} \subset (-d,d)^n$, 并且 $u \in C_0^1(\Omega)$. 利用

$$u(x) = u(x', x_n) = \int_{-d}^{x_n} D_t u(x',t)\mathrm{d}t$$

以及 Holder 不等式易得

$$|u(x)|^p \leqslant (2d)^{p-1}\int_{-d}^{d} |D_n u(x',x_n)|^p \mathrm{d}x_n,$$

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leqslant (2d)^p \|D_n u\|_{p,\Omega}^p,$$

$$n\|u\|_{p,\Omega}^p \leqslant (2d)^p \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{p,\Omega}^p = (2d)^p \|Du\|_{p,\Omega}^p.$$

由此得估计式 (2.9.3). 证毕.

在应用中要特别注意定理中三个式子右端常数 $C$ 的差别. 第一式中右端的常数 $C$ 不依赖于区域 $\Omega$, 而后两个式子中右端的常数 $C$ 依赖于区域 $\Omega$.

**推论 2.9.1** *在定理 2.9.1 中, 如果 $\Omega = B_r$, 那么 (2.9.2) 可以精确地写成*

$$\|u\|_{q,B_r} \leqslant C(n,p,q) r^{1+n/q-n/p} \|Du\|_{p,B_r}, \quad \forall\, u \in \mathring{W}_p^1(B_r).$$

**证明** 令 $x = ry$, $v(y) = u(ry)$, 则 $\mathrm{d}x = r^n \mathrm{d}y$, $D_y v = rD_x u$. 于是

$$\|u\|_{q,B_r} = r^{n/q}\|v\|_{q,B_1}, \quad \|D_x u\|_{p,B_r} = r^{-1+n/p}\|D_y v\|_{p,B_1}.$$

对 $v$ 在 $B_1$ 上应用不等式 (2.9.2) 即可. 证毕.

**定理 2.9.2** *设 $\Omega$ 是有界区域, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则存在正常数 $C = C(p,\Omega)$, 使得*

$$\|u - u_\Omega\|_{p,\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, u \in W_p^1(\Omega) \tag{2.9.4}$$

其中 $u_\Omega$ 是 $u$ 在 $\Omega$ 上的平均. 此外, 存在正常数 $C=C(n,p,q,\Omega)$, 使得

$$\|u-u_\Omega\|_{q,\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega},\quad \forall\, u\in W_p^1(\Omega) \tag{2.9.5}$$

这里, 当 $1\leqslant p<n$ 时 $1\leqslant q\leqslant p^*=np/(n-p)$; 当 $p\geqslant n$ 时 $1\leqslant q<\infty$.

**证明** 不妨认为 $u_\Omega=0$ (若不然, 可以对 $u-u_\Omega$ 进行讨论). 用反证法. 如果式 (2.9.4) 不成立, 则存在 $u_m\in W_p^1(\Omega)$ 满足 $(u_m)_\Omega=0$,

$$\|u_m\|_{p,\Omega}>m\|Du_m\|_{p,\Omega},\quad m=1,2,\cdots.$$

令 $v_m=\dfrac{u_m}{\|u_m\|_{p,\Omega}}$, 则 $(v_m)_\Omega=0$, $\|v_m\|_{p,\Omega}=1$, 并且

$$\|Dv_m\|_{p,\Omega}<1/m,\quad m=1,2,\cdots. \tag{2.9.6}$$

利用紧嵌入定理 (定理 2.8.2) 知, 存在子序列 $\{v_{m_j}\}_{j=1}^\infty\subset\{v_m\}_{m=1}^\infty$ 以及函数 $v\in L^p(\Omega)$, 满足 $v_\Omega=0$, $\|v\|_{p,\Omega}=1$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $v_{m_j}\longrightarrow v$.

另一方面, 对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 及函数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 由式 (2.9.6) 知

$$\int_\Omega vD_i\phi\,\mathrm{d}x=\lim_{m_j\to\infty}\int_\Omega v_{m_j}D_i\phi\,\mathrm{d}x=-\lim_{m_j\to\infty}\int_\Omega \phi D_iv_{m_j}\,\mathrm{d}x=0.$$

这说明 $Dv$ 存在并且 $Dv=0$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立. 故 $v\in W_p^1(\Omega)$. 又因为 $\Omega$ 是连通的, 所以 $v$ 是常数. 再利用 $v_\Omega=0$ 知 $v\equiv 0$. 这与 $\|v\|_{p,\Omega}=1$ 的事实相矛盾, 从而不等式 (2.9.4) 成立.

应用嵌入定理和不等式 (2.9.4) 即得不等式 (2.9.5). 证毕.

定理 2.9.2 的一个特殊而又重要的情形是 $\Omega=B_\rho(x)$. 记 $u_{\rho,x}=⨍_{B_\rho(x)}u(z)\mathrm{d}z$.

**定理 2.9.3** 存在正常数 $C=C(n,p)$, 使得对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\rho>0$, 都有

$$\|u-u_{\rho,x}\|_{p,B_\rho(x)}\leqslant C\rho\|Du\|_{p,B_\rho(x)},\quad \forall\, u\in W_p^1(B_\rho(x)) \tag{2.9.7}$$

又若 $1\leqslant p<n$, 则对任何 $q\in[1,p^*]$, 存在正常数 $C=C(n,p,q)$, 使得对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\rho>0$, 有

$$\|u-u_{\rho,x}\|_{q,B_\rho(x)}\leqslant C\rho^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\|Du\|_{p,B_\rho(x)},\quad \forall\, u\in W_p^1(B_\rho(x)) \tag{2.9.8}$$

**证明** 当 $x=0,\rho=1$ 时，由定理 2.9.2 知存在正常数 $C=C(n,p)$，使得

$$\|u-u_{1,0}\|_{p,B_1}\leqslant C\|Du\|_{p,B_1},\quad \forall\, u\in W_p^1(B_1).$$

而对于一般情形 $u\in W_p^1(B_\rho(x))$，令 $v(y)=u(x+\rho y)$，则 $v\in W_p^1(B_1)$，从而

$$\|v-v_{1,0}\|_{p,B_1}\leqslant C\|Dv\|_{p,B_1}.$$

再换回变量 $x$ 就得到式 (2.9.7).

再证不等式 (2.9.8). 当 $\rho=1$ 时，利用嵌入定理及式 (2.9.7) 知，式 (2.9.8) 成立. 同上，做尺度变换即可证明对于任意的 $\rho>0$，式 (2.9.8) 成立. 证毕.

**定理 2.9.4** 设 $\Omega$ 是有界区域，$\partial\Omega\in C^1$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则对于任意给定的常数 $\varepsilon>0$，存在正常数 $C=C(\varepsilon,p,\Omega)$，使对任何满足

$$|\{x\in\Omega:u(x)=0\}|\geqslant\varepsilon|\Omega|$$

的 $u\in W_p^1(\Omega)$，都有 Poincaré 不等式

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}.$$

**证明** 如果结论不对，同于定理 2.9.2 的证明可证，存在正常数 $\varepsilon$ 和函数 $u_m,u\in W_p^1(\Omega)$，使得

$$|\{x\in\Omega:u_m=0\}|\geqslant\varepsilon|\Omega|,$$

$$\|u_m\|_{p,\Omega}=1,\quad \|Du_m\|_{p,\Omega}<1/m,$$

$$\|u_m-u\|_{p,\Omega}\longrightarrow 0,\quad Du(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in\Omega.$$

这说明 $u$ 是非零常数. 于是

$$\begin{aligned}0&=\lim_{m\to+\infty}\int_\Omega|u_m-u|^p\mathrm{d}x\\&\geqslant\lim_{m\to+\infty}\int_{\{u_m=0\}}|u_m-u|^p\mathrm{d}x\\&\geqslant|u|^p\inf_m|\{x\in\Omega:u_m=0\}|>0.\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 证毕

定理 2.9.1 可以推广到边界迹只在一部分上为零的情况, 这就是下面的定理

**定理 2.9.5** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Omega$ 是有界区域, $\partial\Omega \in C^1$, $S$ 是 $\partial\Omega$ 中的一块曲面, 那么存在正常数 $C = C(p, S, \Omega)$ 使对任意的 $u \in W_p^1(\Omega)$, 只要 $\gamma_0 u|_S = 0$, 就有

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}.$$

**证明** 第一步 证明对于任何 $\phi \in C_0^\infty(\Omega \cup S)$, 分部积分公式

$$\int_\Omega \phi D_i u \mathrm{d}x = -\int_\Omega u D_i \phi \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.9.9}$$

成立, 其中 $C_0^\infty(\Omega \cup S)$ 是空间 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中所有在 $\partial\Omega \setminus S$ 附近为零的函数构成的集合

按照迹算子 $\gamma_0$ 的定义, 对于任何在 $W_p^1(\Omega)$ 中收敛于 $u$ 的函数列 $\{u_j\} \subset C^1(\bar{\Omega})$, 都有 $\|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u\|_{p,\partial\Omega} \to 0$. 又因为 $\gamma_0 u|_S = 0$, 所以 $\|\gamma_0 u_j\|_{p,S} \to 0$. 利用函数 $\phi$ 和 $u_j$ 的光滑性及分部积分公式知

$$\int_\Omega \phi D_i u_j \mathrm{d}x = \int_S \phi u_j \cos(\nu, x_i) \mathrm{d}S - \int_\Omega u_j D_i \phi \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

由于 $\|u_j - u\|_{p,\Omega} \to 0$, $\|\gamma_0 u_j\|_{p,S} \to 0$, 从上式便可推出式 (2.9.9)

第二步 在 $S$ 中取一块曲面 $\Gamma$, 使 $\Gamma$ 的边界到 $S$ 的边界的距离大于零. 沿着 $\Gamma$ 在 $\Omega$ 的外部黏结一个边界属于 $C^1$ 的有界区域 $G$, 使得 $\bar{G} \cap \bar{\Omega} = \Gamma$, 并且 $\Omega^* = \Omega \cup G$ 的边界属于 $C^1$. 显然, $\Omega^*$ 是一个有界区域. 定义函数 $u^*$: 在 $\Omega$ 内 $u^* = u$, 在 $G$ 内 $u^* = 0$.

下面证明 $u^* \in W_p^1(\Omega^*)$. 显然 $u^* \in L^p(\Omega^*)$. 定义函数 $v_i$: 在 $\Omega$ 内 $v_i = D_i u$, 在 $G$ 内 $v_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 那么 $v_i \in L^p(\Omega^*)$. 为证 $u^* \in W_p^1(\Omega^*)$, 只需证明 $u^*$ 的一阶弱导数 $Du^*$ 存在并且 $D_i u^* = v_i$

对于任何 $\phi \in C_0^\infty(\Omega^*)$, 显然有 $\phi \in C_0^\infty(\Omega \cup S)$. 利用等式 (2.9.9) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} u^* D_i\phi\mathrm{d}x &= \int_\Omega u^* D_i\phi\mathrm{d}x + \int_G u^* D_i\phi\mathrm{d}x\\&= \int_\Omega u D_i\phi\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi D_i u\mathrm{d}x\\&= -\int_{\Omega^*} \phi v_i\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此知, $Du^*$ 存在并且 $D_iu^* = v_i$.

第三步　因为 $|\{x \in \Omega^* : u^*(x) = 0\}| \geqslant |\Omega^*|/2$, 对 $u^*$ 利用定理 2.9.4 知, 存在正常数 $C = C(p, \Omega^*)$, 使得

$$\|u^*\|_{p,\Omega^*} \leqslant C\|Du^*\|_{p,\Omega^*}.$$

根据 $u^*$ 的定义, 从上式便推出

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant C(p,\Omega^*)\|Du\|_{p,\Omega}.$$

因为区域 $G$ 由 $S$ 和 $\Omega$ 确定, 所以常数 $C(p,\Omega^*)$ 可由 $p, S$ 和 $\Omega$ 确定. 证毕.

下面讨论空间 $W_n^1(\mathbb{R}^n)$. 设 $u \in W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^1(\mathbb{R}^n)$. 对于 $p = 1$, 由定理 2.9.3 得

$$\begin{aligned}⨍_{B_\rho(x)} |u - u_{\rho,x}|\mathrm{d}y &\leqslant C\rho ⨍_{B_\rho(x)} |Du|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\rho\left(⨍_{B_\rho(x)} |Du|^n\mathrm{d}y\right)^{1/n}\\&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n\mathrm{d}y\right)^{1/n},\end{aligned}$$

即 $u \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ —— 有界平均振幅函数空间. 空间 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 中的半范数定义为

$$[u]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B_\rho(x)\subset\mathbb{R}^n} ⨍_{B_\rho(x)} |u - u_{\rho,x}|\mathrm{d}y,$$

见后面的定义 4.2.1.

最后, 我们给出一个 Poincaré 不等式在特征值的估计中的应用. 考虑 $p$-Laplace 方程的特征值问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9.10}$$

其中 $p > 1$, $\lambda$ 是参数, $\Omega$ 有界. 如果对某个 $\lambda$, 该问题有非零解 $u$, 则称 $\lambda$ 是特征值, 对应的非零解 $u$ 被称为与 $\lambda$ 对应的特征函数.

**定理 2.9.6** 对于问题 (2.9.10) 的特征值 $\lambda$, 下面的估计式成立

$$\lambda \geqslant c(n,p)|\Omega|^{-p/n}. \tag{2.9.11}$$

**证明** 设 $u$ 是与 $\lambda$ 对应的特征函数. 用 $u$ 乘以方程再积分得

$$\|\nabla u\|_{p,\Omega}^p = \lambda \|u\|_{p,\Omega}^p.$$

当 $p < n$ 时, 直接由 Poincaré 不等式 (2.9.1) 得

$$\|u\|_{np/(n-p),\Omega} \leqslant C(n,p)\|\nabla u\|_{p,\Omega}.$$

利用 Hölder 不等式知

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leqslant \left(\int_\Omega |u|^{np/(n-p)}\mathrm{d}x\right)^{(n-p)/n} |\Omega|^{p/n} = \|u\|_{np/(n-p),\Omega}^p |\Omega|^{p/n}.$$

于是

$$\lambda \|u\|_{np/(n-p),\Omega}^p |\Omega|^{p/n} \geqslant \lambda \|u\|_{p,\Omega}^p = \|\nabla u\|_{p,\Omega}^p \geqslant C^{-p}(n,p)\|u\|_{np/(n-p),\Omega}^p.$$

因为 $u$ 是非零函数, 所以估计式 (2.9.11) 成立.

当 $p \geqslant n \geqslant 2$ 时, 取 $q = np/(n+p)$, 那么 $1 \leqslant q < n \leqslant p = nq/(n-q)$. 同上, 由 Poincaré 不等式 (2.9.1) 得

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_{nq/(n-q),\Omega} \leqslant C(n,q)\|\nabla u\|_{q,\Omega}.$$

利用 Holder 不等式又知

$$\|\nabla u\|_{q,\Omega}^p \leqslant |\Omega|^{(p-q)/q}\|\nabla u\|_{p,\Omega}^p = |\Omega|^{p/n}\|\nabla u\|_{p,\Omega}^p.$$

因此

$$\lambda\|u\|_{p,\Omega}^p = \|\nabla u\|_{p,\Omega}^p \geqslant |\Omega|^{-p/n}\|\nabla u\|_{q,\Omega}^p \geqslant C^{-p}(n,q)|\Omega|^{-p/n}\|u\|_{p,\Omega}^p.$$

当 $p \geqslant n = 1$ 时, 不妨认为 $\Omega = (0,a)$, 那么

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t,$$

$$|u(x)|^p \leqslant x^{p-1}\int_0^a |u'(t)|^p\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^a |u(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^p}{p}\int_0^a |u'(t)|^p\mathrm{d}t.$$

因而

$$\lambda\|u\|_{p,\Omega}^p = \|u'\|_{p,\Omega}^p \geqslant pa^{-p}\|u\|_{p,\Omega}^p = p|\Omega|^{-p}\|u\|_{p,\Omega}^p.$$

定理得证.

## 2.10　迹定理 (续)

本节讨论从空间 $W_p^k(\Omega)$ 到空间 $L^q(\partial\Omega)$ 的嵌入.

**引理 2.10.1**　*如果 $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, 那么对几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$, 函数 $v(x') = u(x',\xi)$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, 并且*

$$\|v\|_{1,\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant \|u\|_{1,\mathbb{R}^n} + \|D_n u\|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

**证明**　因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 (定理 2.3.2), 只需对 $\xi = 0$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 给出证明. 利用中值定理知, 存在 $t \in [0,1]$, 使得

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',t)|\,\mathrm{d}x'.$$

由于

$$|u(x',0)| = \left|u(x',t) - \int_0^t D_n u(x',\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant |u(x',t)| + \int_0^1 |D_n u(x',\tau)|\mathrm{d}\tau,$$

在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分上式得

$$\|v\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',t)|\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^1 |D_n u(x',\tau)|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x'$$
$$= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_n + \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^1 |D_n u(x',\tau)|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x'$$
$$\leqslant \|u\|_{1,\mathbb{R}^n} + \|D_n u\|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

**引理 2.10.2** 假设 $1<p<n$, $u\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, 那么对几乎所有的 $\xi\in\mathbb{R}$, 函数 $v(x')=u(x',\xi)$ 属于 $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$, 并且还有

$$\|v\|_{q,\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$$

这里 $q=(n-1)p/(n-p)$, 常数 $C$ 只依赖于 $n$ 和 $p$.

**证明** 首先证明, 若 $u\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $w=|u|^q\in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ 并且

$$\|w\|_{1,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^{q-1}\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}, \quad \|D_i w\|_{1,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^q \tag{2.10.1}$$

只要对于 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 给出证明即可. 令 $r=p/(p-1)$. 那么 $(q-1)r=np/(n-p)$. 先利用定理 2.7.4, 再利用 Poincaré 不等式知

$$\left\||u|^{q-1}\right\|_{r,\mathbb{R}^n}^r \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^{np/(n-p)} \tag{2.10.2}$$

再利用 Holder 不等式得式 (2.10.1) 的第一个不等式

$$\|w\|_{1,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{p,\mathbb{R}^n}\left\||u|^{q-1}\right\|_{r,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^{q-1}\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}$$

因为 $D_i w=\pm q|u|^{q-1}D_i u$, 先利用 Holder 不等式、再利用式 (2.10.2), 可得式 (2.10.1) 的第二个不等式

$$\|D_i w\|_{1,\mathbb{R}^n} \leqslant q\left\||u|^{q-1}\right\|_{r,\mathbb{R}^n}\|D_i u\|_{p,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^q$$

利用引理 2.10.1 于 $w$ 立得

$$\|u\|_{q,\mathbb{R}^{n-1}}^q \leqslant C\left(\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^{q-1}\|u\|_{p,\mathbb{R}^n} + \|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^q\right)$$
$$\leqslant C\left(\|u\|_{p,\mathbb{R}^n}^q + \|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^q\right).$$

**引理 2.10.3** 假设 $kp < n$, $u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 那么对几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$, 函数 $v(x') = u(x', \xi)$ 属于 $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$, 并且还有

$$\|v\|_{q,\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant C(n,k,p)\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n},$$

其中 $q = (n-1)p/(n-kp)$.

**证明** 对 $u$ 的一阶导数利用定理 2.7.4 知, $u \in W^1_{np/(n-k+1),p}(\mathbb{R}^n)$. 再利用引理 2.10.2 可得结论.

**定理 2.10.1** 假设 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega \in C^k$, $p > 1$, $kp \leqslant n$, $u \in W_p^k(\Omega)$, 那么 $u$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹 $\gamma_0 u$ 属于空间 $L^q(\partial\Omega)$, 并且

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}. \tag{2.10.3}$$

这里, 当 $kp < n$ 时 $1 \leqslant q \leqslant (n-1)p/(n-kp)$, 当 $kp = n$ 时 $1 \leqslant q < \infty$, 常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, q$ 和 $\Omega$.

**证明** 第一步 讨论 $kp < n$ 的情况. 因为 $\partial\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega \in C^k$, 所以 $|\partial\Omega|$ 有限. 因此, 只要对于 $q = (n-1)p/(n-kp)$ 的情况证明结论即可.

因为 $\Omega$ 有界, 按定义易证 (见定理 2.3.1 的证明) 存在 $\partial\Omega$ 的有限开覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 以及函数 $\Phi_j: \overline{Q}_j \longrightarrow B$, 满足

$$\Phi_j(Q_j \cap \Omega) = B^+, \quad \Phi_j(Q_j \cap \partial\Omega) = P, \quad \Phi_j \in C^k(\overline{Q}_j), \quad \Phi_j^{-1} \in C^k(\overline{B}),$$

这里的 $B$ 是以原点为心的单位球, $B^+ = \{y \in B: y_n > 0\}$, $P = B \cap \{y_n = 0\}$. 记 $\zeta_j$ 是从属于开覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 的一个有限 $C^\infty$ - 单位分解.

先对空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的函数进行证明. 如果 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么 $(\zeta_j u) \circ \Phi_j^{-1} \in C_0^k(B)$ 并且把 $(\zeta_j u) \circ \Phi_j^{-1}$ 零延拓到 $B$ 的外部后得到的函数属于 $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. 把 $(\zeta_j u) \circ \Phi_j^{-1}$ 在 $\{y_n = 0\}$ 上的迹记为 $w_j$. 注意到, $w_j$ 和 $(\zeta_j u) \circ \Phi_j^{-1}$ 在 $B$ 的外部都恒为零. 根据引理 2.10.3 知, $w_j$ 满足

$$\|w_j\|_{q,P} \leqslant C\|(\zeta_j u) \circ \Phi_j^{-1}\|_{k,p,B} \leqslant C_j\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n}.$$

记 $S_j = Q_j \cap \partial\Omega$. 那么 $v_j = w_j \circ \Phi_j$ 是 $\zeta_j u$ 在 $S_j$ 上的迹, 并且

$$\int_{S_j} |v_j(x)|^q \mathrm{d}S_x = \int_P |w_j(y',0)|^q K_j(y',0)\mathrm{d}y' \leqslant R_j \int_P |w_j(y',0)|^q \mathrm{d}y'$$

这里的函数 $K_j(y)$ 由变换 $x=\Phi_j^{-1}(y)$ 确定. 它在 $\overline{P}$ 上是正的, $R_j = \max_{\overline{P}} K_j(y)$. 由此推知

$$\|v_j\|_{q,S_j} \leqslant C_j \|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n}.$$

由于 $u=\sum_{j=1}^N \zeta_j u$, 所以 $\gamma_0 u = \sum_{j=1}^N v_j$, 从而

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} \leqslant \sum_{j=1}^N \|v_j\|_{q,\partial\Omega} = \sum_{j=1}^N \|v_j\|_{q,S_j} \leqslant C\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n}. \quad (2.10.4)$$

下面对 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数进行证明. 记 $E: W_p^k(\Omega)\longrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 是由定理 2.3.1 给出的延拓算子. 设 $u\in W_p^k(\Omega)$, 那么 $Eu\in W_p^k(\mathbb{R}^n)$. 因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 故存在 $u_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_j\longrightarrow Eu$. 对于 $u_j$ 而言, 估计式 (2.10.4) 成立. 因而当 $i,j\longrightarrow\infty$ 时

$$\|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u_i\|_{q,\partial\Omega} \leqslant C\|u_j-u_i\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\longrightarrow 0.$$

这说明 $\{\gamma_0 u_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $L^q(\partial\Omega)$ 中的一个基本列, 故存在 $L^q(\partial\Omega)$ 中的函数 (记为 $\gamma_0 u$), 使得 $\gamma_0 u_j \longrightarrow \gamma_0 u$. 由于 $\|\gamma_0 u_j\|_{q,\partial\Omega}\leqslant C\|u_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n}$, 并且在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_j\longrightarrow Eu$, 所以

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} \leqslant C\|Eu\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}.$$

**第二步** 讨论 $kp=n$ 的情况. 容易看出, 对于任意的 $1\leqslant q<\infty$, 存在 $p'$, $1<p'<p$, 使得 $kp'<n$ 并且 $q=(n-1)p'/(n-kp')$. 由上面已证结论知,

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p',\Omega}.$$

因为 $p'<p$ 并且 $\Omega$ 有界, 由上式即得不等式 (2.10.3). 证毕.

**注 2.10.1** 由于 $\partial\Omega$ 光滑且有界, 所以 $\partial\Omega$ 的 $n-1$ 维测度有限. 因而

(1) 不等式 (2.10.3) 对于 $0<q<1$ 也成立.

(2) 当 $kp>n$ 时, 不等式 (2.10.3) 对于 $0<q<\infty$ 都成立. 实际上还有更精确的结果. 限于篇幅, 不再详述.

## 2.11 内插不等式, $W_p^k(\Omega)$ 中的等价范数

内插不等式 (内插定理) 是分析学中的一个常用工具. 在偏微分方程的先验估计中起着重要作用.

**定理 2.11.1 (内插定理)** 设 $X, Y, Z$ 都是 Banach 空间, $X\hookrightarrow\hookrightarrow Y\hookrightarrow Z$. 那么, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在正常数 $C=C(\varepsilon)$, 使得

$$\|x\|_Y\leqslant\varepsilon\|x\|_X+C(\varepsilon)\|x\|_Z,\quad\forall\, x\in X.$$

**证明** 如果结论不对, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $x_m\in X$, 使得

$$\|x_m\|_Y>\varepsilon_0\|x_m\|_X+m\|x_m\|_Z.$$

令 $\tilde{x}_m=x_m/\|x_m\|_Y$, 则 $1>\varepsilon_0\|\tilde{x}_m\|_X+m\|\tilde{x}_m\|_Z$. 由此得

$$\text{(a)}\ \ \|\tilde{x}_m\|_Z<1/m,\qquad\text{(b)}\ \ \|\tilde{x}_m\|_X<1/\varepsilon_0.$$

由 (a) 知, 在空间 $Z$ 中 $\tilde{x}_m\to0$. 由 (b) 知, $\{\tilde{x}_m\}$ 在 $X$ 中有界. 所以存在 $\{\tilde{x}_m\}$ 的子序列 $\{\tilde{x}_{m_i}\}$, 在 $Y$ 中收敛于某个 $\tilde{x}\in Y\subset Z$. 由极限的唯一性知 $\tilde{x}=0$. 又因为 $\|\tilde{x}_m\|_Y=1$, 故 $\|\tilde{x}\|_Y=1$. 矛盾.

**定理 2.11.2** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega\in C^1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $j,k$ 是整数并且 $1\leqslant j<k$. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正常数 $C=C(\varepsilon,k,j,p,n,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{j,p,\Omega}\leqslant\varepsilon\|u\|_{k,p,\Omega}+C\|u\|_{j-1,p,\Omega},\quad\forall\, u\in W_p^k(\Omega).$$

**证明** 逐次应用定理 2.8.2 知 $W_p^k(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_p^j(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_p^{j-1}(\Omega)$, 再利用定理 2.11.1 即可.

**定理 2.11.3** 在定理 2.11.2 的条件下, 对于任意的 $0<\varepsilon<1$, 存在正常数 $C=C(\varepsilon,p,n,\Omega)$, 使得

$$\|D^j u\|_{p,\Omega} \leqslant \varepsilon\|D^k u\|_{p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega}, \quad \forall\, u\in W_p^k(\Omega)$$

**证明** 重复利用定理 2.11.2 得,

$$\|u\|_{j,p,\Omega} \leqslant \varepsilon\|u\|_{k,p,\Omega} + C\|u\|_{0,p,\Omega}, \quad \forall\, u\in W_p^k(\Omega)$$

对于 $\delta=\varepsilon/(1+\varepsilon)<1$, 再次利用定理 2.11.2 又知, 存在正常数 $C=C(\varepsilon,k,p,n,\Omega)$, 使得对任意的 $u\in W_p^k(\Omega)$, 都有

$$\begin{aligned}
\|u\|_{k-1,p,\Omega} &\leqslant \delta\|u\|_{k,p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega}\\
&\leqslant \delta\|u\|_{k-1,p,\Omega} + \delta\|D^k u\|_{p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega}\\
&\leqslant \varepsilon\|D^k u\|_{p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega},\\
\|u\|_{k-2,p,\Omega} &\leqslant \varepsilon\|D^{k-1} u\|_{p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega}\\
&\leqslant \varepsilon^2\|D^k u\|_{p,\Omega} + C\|u\|_{p,\Omega}.
\end{aligned}$$

重复做下去, 一直做到 $D^j u$ 即得结论. 证毕

**推论 2.11.1** 在定理 2.11.2 的条件下, $W_p^k(\Omega)$ 中的新范数

$$\|u\|_{\overset{*}{W}{}_p^k(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^p + |D^k u|^p)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

与通常的范数 $\|u\|_{k,p,\Omega}$ 等价

根据 Poincaré 不等式, 在 $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ 中范数 $\|u\|_{1,p,\Omega}$ 与新范数 $\|Du\|_{p,\Omega}$ 等价

**定理 2.11.4** 假设 $\Omega$ 有界或者 $\Omega=\mathbf{R}^n$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $j,k$ 是整数, $0\leqslant j<k$, $j/k\leqslant\theta\leqslant1$, 并且满足

(1) $$\frac1q = \frac jn + \theta\left(\frac1p - \frac kn\right) + \frac{1-\theta}{r}, \tag{2.11.1}$$

(2) 当 $n>pk$ 时 $r\leqslant np/(n-pk)$, 当 $n\leqslant pk$ 时 $r\leqslant\infty$,

(3) $$\begin{cases} 当\ n>p(k-j)\ 时\ \dfrac{nr}{n+rj}\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-p(k-j)},\\ 当\ n\leqslant p(k-j)\ 时\ \dfrac{nr}{n+rj}\leqslant q<\infty,\end{cases}$$

那么存在常数 $C=C(n,k,p,r,j,\theta,\Omega)$, 使得

$$\|D^j u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|D^k u\|^{\theta}_{p,\Omega}\|u\|^{1-\theta}_{r,\Omega},\quad \forall\, u\in \mathring{W}^k_p(\Omega)\qquad(2.11.2)$$

再利用带 $\varepsilon$ 的 Young 不等式又知: 若 $0<\theta<1$, 则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 有

$$\|D^j u\|_{q,\Omega}\leqslant \varepsilon\|D^k u\|_{p,\Omega}+C\varepsilon^{\theta/(\theta-1)}\|u\|_{r,\Omega},\quad \forall\, u\in \mathring{W}^k_p(\Omega)$$

如果 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^k$, 对空间 $W^k_p(\Omega)$ 中的函数而言, 相应的内插不等式是

$$\|D^j u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|u\|^{\theta}_{k,p,\Omega}\|u\|^{1-\theta}_{r,\Omega},\quad \forall\, u\in W^k_p(\Omega)$$

如果 $k=1$, $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^1$, 那么内插不等式 (2.11.2) 对于满足 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的 $u\in W^1_p(\Omega)$ 也成立.

**注 2.11.1** 假设 $\Omega$ 有界, 对于 $u\in \mathring{W}^k_p(\Omega)$, 在内插不等式 (2.11.2) 中取 $r=q=p$, 利用 Poincaré 不等式 (2.9.3) 容易推出

$$\|D^j u\|_{p,\Omega}\leqslant C_j\|D^k u\|_{p,\Omega},\quad j=0,1,\cdots,k-1.$$

因而, 在空间 $\mathring{W}^k_p(\Omega)$ 中可以用 $\|D^k u\|_{p,\Omega}$ 作为范数.

**定理 2.11.4 的证明**　由不等式 (2.11.2) 得到证明. 先按照定理 2.3.1 的方式把 $u$ 延拓到 $\mathbb{R}^n$, 再利用已证结论 ($\Omega=\mathbb{R}^n$ 的情况) 可得第一个结果. 在第二个结果的基础上, 利用 Poincaré 不等式便得第三个结果.

下面证明不等式 (2.11.2). 只对 $\Omega$ 是有界开集的情况给出证明, 其过程对于 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 的情况也成立.

当 $\theta=1$ 时, 直接应用嵌入定理即得不等式 (2.11.2). 当 $\theta=0$ 时, 一定有 $j=0$, 从而 $q=r$, 不等式 (2.11.2) 显然成立. 对于 $0<\theta<1$, $r=\infty$ 的情况. 如果 $\|u\|_{\infty,\Omega}=\infty$, 那么式 (2.11.2) 显然成立. 如果 $u\in L^\infty(\Omega)$, 则对任意的 $r_i<\infty$, 有 $u\in L^{r_i}(\Omega)$. 选取 $r_i\nearrow\infty, q_i\nearrow q$,

使之满足定理的条件. 只要证明定理的结论对于这样的 $r_i, q_i$ 成立, 再令 $i\to\infty$ 即得所要的结论. 因此, 下面只讨论 $0<\theta<1, r<\infty$ 的情况.

首先, 由 $q, r$ 的取值范围和嵌入定理知, $W_p^k(\Omega)\hookrightarrow W_q^j(\Omega)\bigcap L^r(\Omega)$. 因为本定理的证明篇幅较长, 我们从其证明中分出两个引理.

**引理 2.11.1** 当 $k=1, j=0$ 时, 定理 2.11.4 成立.

**证明** 此时, 关系式 (2.11.1) 成为

$$\frac{1}{q}=\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\theta}{r}, \tag{2.11.3}$$

不等式 (2.11.2) 成为

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta}. \tag{2.11.4}$$

第一步 考虑 $n=1$ 的情况. 因为 $\theta>0$, 所以 $q>r$. 如果对于 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 的情况能够证明该引理, 再利用稠密性便可完成引理的证明.

设 $u\in C_0^\infty(\Omega)$. 取开区间 $(a,b)$, 使得 $\Omega\Subset(a,b)$, 再把 $u$ 零延拓到 $(a,b)\setminus\Omega$. 那么 $u(a)=u(b)=0$. 对于任意的 $m>1$, 有

$$\begin{aligned}
|u(x)|^q &= |u(x)|^r(|u|^m)^{(q-r)/m}\\
&= |u(x)|^r\left(\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|u|^m\mathrm{d}x\right)^{(q-r)/m}\\
&= |u(x)|^r\left(\int_a^x m|u|^{m-2}uu'\mathrm{d}x\right)^{(q-r)/m}\\
&\leqslant |u(x)|^r\left(\int_a^x m|u|^{m-1}|u'|\mathrm{d}x\right)^{(q-r)/m}.
\end{aligned}$$

上式两边在 $(a,b)$ 上积分得

$$\|u\|_{q,\Omega}^q\leqslant\|u\|_{r,\Omega}^r\left(\int_a^b m|u|^{m-1}|u'|\mathrm{d}x\right)^{(q-r)/m}. \tag{2.11.5}$$

利用 Hölder 不等式知

$$\left|\int_a^x |u|^{m-1}|u'|\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |u'|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b |u|^{(m-1)p/(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}$$

取 $m>1$, 使得 $(m-1)p/(p-1)=r$, 即 $m=1+r(p-1)/p$. 再由关系式 (2.11.3) 可解出 $\theta=(q-r)/(mq)$. 将这些结果代入式 (2.11.5) 即得不等式 (2.11.4).

**第二步** 考虑 $n\geqslant 2$ 的情况.

(i) 先设 $p<n$. 由 $q$ 的取值范围知, $r\leqslant q\leqslant np/(n-p)$. 记 $p^*=np/(n-p)$, 利用 Poincaré 不等式 (定理 2.9.1) 得

$$\|u\|_{p^*,\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega},\quad \forall\, u\in \mathring{W}_p^1(\Omega).$$

对于 $r\leqslant q\leqslant np/(n-p)=p^*$ 以及由关系式 (2.11.3) 确定的 $\theta$, 利用 $L^p$ 范数的内插不等式, 我们有

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant \|u\|_{p^*,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta}\leqslant C^{\theta}\|Du\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta}.$$

不等式 (2.11.4) 得证.

(ii) 再设 $p\geqslant n$. 我们先讨论 $q\theta\geqslant n/(n-1)$ 的情况. 记 $h=q\theta$, $h^*=nh/(n+h)$, 那么 $h=nh^*/(n-h^*)$. 应用 Poincaré 不等式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x &= \int_\Omega (|u|^{q/h})^h\mathrm{d}x\\ &\leqslant C^h\left(\int_\Omega |D|u|^{q/h}|^{h^*}\mathrm{d}x\right)^{h/h^*}\\ &\leqslant \frac{C^h}{\theta^h}\left(\int_\Omega |u|^{h^*(q-h)/h}|Du|^{h^*}\mathrm{d}x\right)^{h/h^*},\end{aligned}\qquad (2.11.6)$$

其中常数 $C$ 仅依赖于 $n,h,\Omega$. 由关系式 (2.11.3) 得 $\frac{1}{n}-\frac{1}{p}+\frac{1}{h}=\frac{1-\theta}{r\theta}>0$, 因此 $h^*<p$. 对式 (2.11.6) 的右端应用 Hölder 不等式, 则有

$$\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x\leqslant \frac{C^h}{\theta^h}\left(\int_\Omega |Du|^p\mathrm{d}x\right)^{h/p}\left(\int_\Omega |u|^r\mathrm{d}x\right)^{h(p-h^*)/(ph^*)}\qquad (2.11.7)$$

注意到 $\frac{p-h^*}{ph^*}=\frac{1-\theta}{r\theta}$, $h=q\theta$, 对式 (2.11.7) 两边开 $q$ 次方即得不等式 (2.11.4).

再讨论 $q\theta<n/(n-1)$ 的情况. 由关系式 (2.11.3) 知 $\frac{n-1}{n}<\frac{1}{q\theta}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}+\frac{1-\theta}{r\theta}$. 由 $p\geqslant n>1$ 又知, $\theta<1$, $r<q$, 且唯一存在 $\theta^*\in(\theta,1)$, 使得 $\frac{n-1}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}+\frac{1-\theta^*}{r\theta^*}$. 取 $q^*$ 满足 $q^*\theta^*=n/(n-1)$, 那么

$$\frac{1}{q^*}=\theta^*\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\theta^*}{r}$$

容易验证

$$q^*=\frac{np+n(p-1)r}{(n-1)p}>q. \tag{2.11.8}$$

利用已证结果 (因为 $q^*$ 和 $\theta^*$ 满足 $q^*\theta^*=n/(n-1)$) 有

$$\|u\|_{q^*,\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{\theta^*}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta^*}. \tag{2.11.9}$$

取 $\lambda\in(0,1)$ 满足 $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{q^*}+\frac{1-\lambda}{r}$, 则由 $L^p$ 范数的内插不等式及式 (2.11.9) 得

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant\|u\|_{q^*,\Omega}^{\lambda}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\lambda}\leqslant C^{\lambda}\|Du\|_{p,\Omega}^{\lambda\theta^*}\|u\|_{r,\Omega}^{\lambda(1-\theta^*)+1-\lambda}$$

易验证 $\lambda\theta^*=\theta$, 因而不等式 (2.11.4) 成立. 引理得证.

**引理 2.11.2** 对于 $k=2$, $j=1$, $\theta=1/2$, 定理 2.11.4 成立.

**证明** 此时关系式 (2.11.1) 成为

$$\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$$

式 (2.11.2) 成为

$$\|Du\|_{q,\Omega}\leqslant C\|D^2u\|_{p,\Omega}^{1/2}\|u\|_{r,\Omega}^{1/2} \tag{2.11.10}$$

显然有 $1/q\geqslant 1/p-1/n$. 于是 $W_p^2(\Omega)\hookrightarrow W_q^1(\Omega)\bigcap L^r(\Omega)$.

若对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 能够证明估计式 (2.11.10), 再利用 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ 中的稠密性可知, 式 (2.11.10) 对于 $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ 也成立.

假设 $u \in C_0^\infty(\Omega)$. 把 $u$ 零延拓到 $\mathbb{R}^n$, 估计式 (2.11.10) 等价于

$$\|Du\|_{q,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|D^2u\|_{p,\mathbb{R}^n}^{1/2}\|u\|_{r,\mathbb{R}^n}^{1/2}. \tag{2.11.11}$$

如果能够证明存在绝对常数 $C$ (与 $u, p, q$ 和 $r$ 无关), 使得

$$\int_{\mathbb{R}} |u_x|^q \mathrm{d}x \leqslant C^q \left(\int_{\mathbb{R}} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{q/(2p)} \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^r \mathrm{d}x\right)^{q/(2r)}, \tag{2.11.12}$$

那么对上式关于其余变量积分, 并利用 Hölder 不等式即得式 (2.11.11).

下面证明不等式 (2.11.12). 不妨认为 $p > 1$. 如果 $p = 1$, 取 $1 < p_i \searrow 1, q_i \searrow q$ 使之满足

$$\frac{2}{q_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{r}.$$

对于这样的 $p_i$ 和 $q_i$, 若式 (2.11.12) 成立, 由于 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $C$ 是绝对常数 (与 $u$, $p_i$, $q_i$ 和 $r$ 无关). 令 $i \longrightarrow \infty$ 即可得到 $p = 1$ 时的式 (2.11.12).

我们先考虑有限区间 $[a, b]$ 上的积分. 记 $l = b - a$. 对于 $x_1 \in [a, a + l/3]$, $x_2 \in [b - l/3, b]$, 应用微分中值公式得

$$u_x(\bar{x}) = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \leqslant \bar{x} \leqslant x_2.$$

由此知

$$|u_x(\bar{x})| \leqslant \frac{3}{l}(|u(x_2)| + |u(x_1)|).$$

对于任意 $x \in (a, b)$, 我们有

$$\begin{aligned}|u_x(x)| &\leqslant |u_x(x) - u_x(\bar{x})| + |u_x(\bar{x})| \\ &\leqslant \int_a^b |u_{xx}|\mathrm{d}x + \frac{3}{l}(|u(x_2)| + |u(x_1)|).\end{aligned}$$

上式先关于 $x_1$ 在 $[a, a + l/3]$ 上积分, 再关于 $x_2$ 在 $[b - l/3, b]$ 上积分, 最后利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}|u_x(x)| &\leqslant \int_a^b |u_{xx}|\mathrm{d}x + \frac{18}{l^2}\int_a^b |u(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant l^{(p-1)/p}\left(\int_a^b |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + 18l^{-1-1/r}\left(\int_a^b |u|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r}\end{aligned}$$

上式两边 $q$ 次方并关于 $x$ 在 $(a,b)$ 上积分得

$$\int_a^b |u_x(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant C^q l^h \left(\int_a^b |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{q/p} + C^q l^{-h} \left(\int_a^b |u|^r \mathrm{d}x\right)^{q/r}, \qquad (2.11.13)$$

其中 $h = 1 + q(1 - 1/p) > 1$, $C$ 是绝对常数 (与 $u$, $p$, $q$ 和 $r$ 无关).

现在不妨假设 $\|u_{xx}\|_{p,\mathbb{R}} = 1$, 并且认为 $u$ 的支集在正半轴. 如果能够证明对于任意的 $L > 0$, 都有

$$\int_0^L |u_x(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant C^q \left(\int_0^\infty |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^\gamma \left(\int_0^\infty |u|^r \mathrm{d}x\right)^\zeta, \qquad (2.11.14)$$

其中 $\gamma = q/(2p)$, $\zeta = q/(2r)$, $C$ 是绝对常数 (与 $u$, $p$, $q$ 和 $r$ 无关), 然后再令 $L \longrightarrow \infty$ 即得不等式 (2.11.12).

我们用小区间 $I_i$ 覆盖 $[0, L]$ 来证明不等式 (2.11.14). 任意固定一个较大的正整数 $m$, 先取 $[a,b] = [0, L/m]$, 并记 $l = b - a = L/m$. 对于这样的区间 $[a,b]$, 如果不等式 (2.11.13) 右端的第一项大于或者等于第二项, 就取 $I_1 = [0, L/m]$, 那么

$$\int_{I_1} |u_x(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant 2C^q l^h \left(\int_a^b |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{q/p} \leqslant 2C^q \left(\frac{L}{m}\right)^h.$$

如果不等式 (2.11.13) 右端的第一项小于第二项, 因为 $h > 0$, 我们可以往右延长区间 $[a,b]$, 直到不等式 (2.11.13) 右端的第一项等于第二项. 把这样得到的区间记为 $I_1$, 则有

$$\int_{I_1} |u_x(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant 2C^q \left(\int_{I_1} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^\gamma \left(\int_{I_1} |u|^r \mathrm{d}x\right)^\zeta.$$

总之, 对于这样确定的区间 $I_1$, 其长度 $\geqslant L/m$, 并且成立

$$\int_{I_1} |u_x(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant 2C^q \left(\frac{L}{m}\right)^h + 2C^q \left(\int_{I_1} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^\gamma \left(\int_{I_1} |u|^r \mathrm{d}x\right)^\zeta.$$
$$(2.11.15)$$

以 $I_1$ 的右端点为起点, 依照上述方法确定 $I_2$, 接着是 $I_3$, $\cdots$, 最终得到 $I_1, I_2, \cdots, I_s$ $(s \leqslant m)$, 它们覆盖 $[0, L]$, 并且在每一个 $I_i$ 上相应的不等式 (2.11.15) 成立. 两边关于 $i = 1, 2, \cdots, s$ 求和, 注意到 $\gamma + \zeta = 1$, 应用离散的 Hölder 不等式便可推出

$$\begin{aligned}\int_0^L |u_x(x)|^q \mathrm{d}x &\leqslant 2C^q s\left(\frac{L}{m}\right)^h + 2C^q \sum_{i=1}^{s}\left(\int_{I_i} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{\gamma}\left(\int_{I_i} |u|^r \mathrm{d}x\right)^{\zeta} \\ &\leqslant 2C^q s\left(\frac{L}{m}\right)^h + 2C^q\left(\sum_{i=1}^{s}\int_{I_i} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{s}\int_{I_i} |u|^r \mathrm{d}x\right)^{\zeta} \\ &\leqslant 2C^q m\left(\frac{L}{m}\right)^h + 2C^q\left(\int_0^{\infty} |u_{xx}|^p \mathrm{d}x\right)^{\gamma}\left(\int_0^{\infty} |u|^r \mathrm{d}x\right)^{\zeta}.\end{aligned}$$

由于注意到 $h > 1$, 令 $m \to +\infty$ 就得到式 (2.11.14). 引理得证.

**继续定理 2.11.4 的证明** 对于 $k = 2$, $j = 1$, $1/2 = j/k < \theta < 1$ 的一般情形, 此时式 (2.11.2) 成为

$$\|Du\|_{q,\Omega} \leqslant C\|D^2 u\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta}. \tag{2.11.16}$$

关系式 (2.11.1) 成为

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{n}\right) + \frac{1-\theta}{r}.$$

由引理 2.11.2,

$$\|Du\|_{\tilde{q},\Omega} \leqslant C\|D^2 u\|_{p,\Omega}^{1/2}\|u\|_{r,\Omega}^{1/2}, \tag{2.11.17}$$

其中 $\tilde{q}$ 满足 $\dfrac{2}{\tilde{q}} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}$. 取 $\tilde{\theta} = 2\theta - 1$, 则有

$$\frac{1}{q} = \tilde{\theta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{q}}.$$

应用引理 2.11.1 得

$$\|Du\|_{q,\Omega} \leqslant C\|D(Du)\|_{p,\Omega}^{\tilde{\theta}}\|Du\|_{\tilde{q},\Omega}^{1-\tilde{\theta}} = C\|D^2 u\|_{p,\Omega}^{\tilde{\theta}}\|Du\|_{\tilde{q},\Omega}^{1-\tilde{\theta}}.$$

此式结合式 (2.11.17), 就推出式 (2.11.16).

关于 $k, j$ 用归纳法, 便可完成定理 2.11.4 的证明.

**定理 2.11.5** 假设 $\Omega$ 有界或者 $\Omega=\mathbb{R}^n$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k$ 是正整数, $1/p-k/n\leqslant 1/r\leqslant 1$, $0<\theta,\alpha<1$, 满足

$$\alpha=\theta\left(k-\frac{n}{p}\right)-\frac{n(1-\theta)}{r},$$

那么存在正常数 $C=C(n,k,p,r,\theta,\alpha,\Omega)$, 使得

$$[u]_{\alpha,\Omega}\leqslant C\|D^k u\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta},\quad\forall\, u\in \mathring{W}_p^k(\Omega) \tag{2.11.18}$$

如果 $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^k$, 对空间 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数而言, 相应的内插不等式是

$$[u]_{\alpha,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{r,\Omega}^{1-\theta},\quad\forall\, u\in W_p^k(\Omega)$$

如果 $k=1$, $\Omega$ 有界并且 $\partial\Omega\in C^1$, 那么内插不等式 (2.11.18) 对于满足 $u_\Omega=0$ 的 $u\in W_p^1(\Omega)$ 也成立.

证明留作习题

最后讨论边界迹的内插不等式.

**定理 2.11.6 (边界迹的内插不等式)** 假设 $\Omega$ 有界, $n\geqslant 2$, $\partial\Omega\in C^1$. 又设 $1<p<\infty$, 当 $p<n$ 时 $p\leqslant q\leqslant p(n-1)/(n-p)$, 当 $p\geqslant n$ 时 $p\leqslant q<\infty$. 那么存在正常数 $C$, 使得对于任意的 $u\in W_p^1(\Omega)$, 只要 $u_\Omega=0$, 就有

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega}\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{p,\Omega}^{1-\theta},$$

其中 $\theta=\frac{1}{q}+\frac{n(q-p)}{pq}\in(0,1]$.

**证明** 记 $r=p(q-1)/(p-1)$. 对于 $u\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$|u(x',0)|^q=-\int_0^\infty D_t(|u(x',t)|^q)\mathrm{d}t=-q\int_0^\infty(|u|^{q-2}uD_t u)(x',t)\mathrm{d}t$$

上式两边关于 $x'$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分, 并利用 Holder 不等式得

$$\|u(x',0)\|_{q,\mathbb{R}^{n-1}}\leqslant q^{1/q}\|Du\|_{p,\mathbb{R}^n}^{1/q}\|u\|_{r,\mathbb{R}^n}^{1-1/q}$$

对于 $u \in W_p^1(\Omega)$, $u_\Omega = 0$, 同于定理 2.10.1 的证明可证

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}^{1/q}\|u\|_{r,\Omega}^{1-1/q}.$$

因为 $u_\Omega = 0$, 利用 Poincaré 不等式 $\|u\|_{p,\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}$ 知, $\|u\|_{1,p,\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}$. 因而

$$\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{1/q}\|u\|_{r,\Omega}^{1-1/q}. \tag{2.11.19}$$

若 $q = p$, 那么 $r = p$, $\theta = 1/q$, 不等式 (2.11.19) 即是要证的结论.

若 $q > p$, 则 $r > p$. 利用定理 2.11.4 可得 (因为 $u_\Omega = 0$)

$$\|u\|_{r,\Omega} \leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{\beta}\|u\|_{p,\Omega}^{1-\beta}, \quad \forall\, u \in W_p^1(\Omega),$$

其中 $\beta = n(q-p)/[p(q-1)] \in (0,1]$. 将该估计式代入式 (2.11.19) 得

$$\begin{aligned}\|\gamma_0 u\|_{q,\partial\Omega} &\leqslant C\|Du\|_{p,\Omega}^{\frac{1}{q}+\beta(1-\frac{1}{q})}\|u\|_{p,\Omega}^{(1-\beta)(1-\frac{1}{q})}\\ &= C\|Du\|_{p,\Omega}^{\theta}\|u\|_{p,\Omega}^{1-\theta}, \quad \forall\, u \in W_p^1(\Omega).\end{aligned}$$

## 2.12　空间 $H^{-1}(\Omega)$ 的刻画

本节讨论经常用到的空间 $H^{-1}(\Omega)$, 即 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间. 我们首先强调下面的事实

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

通常用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H^{-1}(\Omega)$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 之间的对偶积.

**定义 2.12.1**　设 $f \in H^{-1}(\Omega)$, 定义 $f$ 的范数

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\langle f, u\rangle : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1\right\}.$$

**定理 2.12.1** ($H^{-1}(\Omega)$ 的刻画)　$f \in H^{-1}(\Omega)$ 当且仅当存在函数 $f^0, f^1, \cdots, f^n \in L^2(\Omega)$, 使得

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i D_i v\right) \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.12.1}$$

进一步还有

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}=\inf\left\{\left(\int_\Omega\sum_{i=0}^n|f^i|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\ \middle|\ f^0,\cdots,f^n\in L^2(\Omega),\ \text{满足式 (2.12.1)}\right\}. \quad (2.12.2)$$

当式 (2.12.1) 成立时，我们通常写成 $f=f^0-\sum_{i=1}^n D_if^i$.

特别地，当 $f\in L^2(\Omega)$ 时，$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant\|f\|_{2,\Omega}$，并且

$$\langle f,v\rangle=(f,v)_{L^2}=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega). \quad (2.12.3)$$

**证明** (1) 如果存在函数 $f^0$、$f^1$、$\cdots$、$f^n\in L^2(\Omega)$，那么按照 (2.12.1) 定义的 $f\in H^{-1}(\Omega)$.

(2) 给定 $u,v\in H_0^1(\Omega)$，定义内积

$$(u,v)_{H_0^1}=\int_\Omega(Du\cdot Dv+uv)\mathrm{d}x.$$

设 $f\in H^{-1}(\Omega)$. 由 Riesz 表现定理知，唯一存在函数 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}=\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$，且

$$(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega(Du\cdot Dv+uv)\mathrm{d}x=\langle f,v\rangle,\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

取

$$f^0=u,\quad f^i=D_iu,\quad i=1,\cdots,n,$$

则式 (2.12.1) 成立，并且

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}=\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{i=0}^n|f^i|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \quad (2.12.4)$$

(3) 假设 $f\in H^{-1}(\Omega)$，并且存在 $g^0,g^1,\cdots,g^n\in L^2(\Omega)$，使得

$$\langle f,v\rangle=\int_\Omega\left(g^0v+\sum_{i=1}^n g^iD_iv\right)\mathrm{d}x,\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega),$$

那么

$$(f,v) \leqslant \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

因此

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^n |g^i|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

再利用式 (2.12.4) 知, 式 (2.12.2) 成立.

(4) 当 $f \in L^2(\Omega)$ 时, 式 (2.12.4) 的右端定义了 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函, 因此等式 (2.12.3) 成立. 取 $f^0 = f$, $f^i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 由式 (2.12.2) 知 $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{2,\Omega}$. 证毕.

## 2.13　嵌入定理的补充和反例

在前面的嵌入定理中, 我们总假设 $\Omega$ 有界并且要求 $\partial\Omega \in C^1$, 这完全是为了证明简便而已. 事实上, 对于边界 $\partial\Omega$ 具有适当正则性的开集 $\Omega$ (不需要有界, 边界也不需要属于 $C^1$), 前面的一些嵌入定理仍然成立. 鉴于学时和篇幅的限制, 这里只叙述相关结论, 而不给出烦琐的证明.

我们也通过例子来说明, 前面给出的一些嵌入结果是最优的、不可改进的.

### 2.13.1　集合的光滑性

**定义 2.13.1**　*称开集 $\Omega$ 具有强局部 Lipschitz 性质, 如果存在正数 $\delta$ 和 $M$, 以及 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开覆盖 $\{U_j\}$ 使以下性质成立:*

*(1) 存在正整数 $N$ 使得任意 $N+1$ 个 $U_j$ 的交是空集;*

*(2) 对于任意满足 $|x-y|<\delta$ 的点 $x, y \in \left\{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \delta\right\}$, 都存在 $j$ 使得 $x, y \in \left\{z \in U_j : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) > \delta\right\}$;*

*(3) 每个 $U_j$ 都对应着一个以 $M$ 为 Lipschitz 常数的 Lipschitz 连*

续函数 $\phi_j$ $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，通过改变坐标的顺序，集合 $\Omega \cap U_j$ 可以写成

$$\Omega \cap U_j = \{x \in U_j : x_n > \phi_j(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

按照定义容易验证，具有强局部 Lipschitz 性质的开集一定具有锥性质

### 2.13.2 一般开集情形的嵌入定理

**定理 2.13.1 ([1, 定理 5.4], [2, 定理 4.12])** 设 $\Omega$ 具有锥性质，$j, k$ 是非负整数

(1) 当 $kp < n$ 时，对于任意的 $p \leqslant q \leqslant np/(n-kp)$，有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega)$，其中嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, q$ 和决定 $\Omega$ 的锥性质的有限锥

(2) 当 $kp = n$ 时，对于任意的 $p \leqslant q < \infty$，有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega)$ 其中嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, q$ 和决定 $\Omega$ 的锥性质的有限锥 特别地，$W_1^{j+n}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$;

(3) 当 $kp > n$ 时，$W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$ 又若 $\Omega$ 具有强局部 Lipschitz 性质，那么当 $(k-1)p < n < kp$ 时

$$W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, 0 < \alpha \leqslant k - n/p;$$

当 $n = (k-1)p$ 时

$$W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall\, 0 < \alpha < 1. \tag{2.13.1}$$

此外，对于 $n = k-1$ 且 $p = 1$ 的特殊情形，当 $\alpha = 1$ 时嵌入 (2.13.1) 也成立，这里的嵌入常数 $C$ 只依赖于 $n, k, p, \alpha$ 以及 $\Omega$ 的强局部 Lipschitz 性质

当开集 $\Omega$ 具有有限测度时，上面的嵌入结果 (1) 和 (2) 对 $1 \leqslant q < p$ 显然成立

**定理 2.13.2 ([1, 定理 6.2], [2, 定理 6.3])** 设 $\Omega_0$ 是 $\Omega$ 的一个有界开子集，$j$ 和 $k$ 都是非负整数，$1 \leqslant p < \infty$

(1) 如果 $\Omega$ 具有锥性质, 那么

当 $kp < n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q < np/(n-kp)$, 有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_q^j(\Omega_0)$;

当 $kp = n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q < \infty$, 有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_q^j(\Omega_0)$;

当 $kp > n$ 时, 对任意的 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^j(\Omega_0)$, $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_q^j(\Omega_0)$.

(2) 如果 $\Omega$ 具有强局部 Lipschitz 性质, 并且 $kp > n$, 那么

当 $(k-1)p < n < kp$ 时, 对任意的 $0 < \alpha < k - n/p$, 有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$;

当 $n = (k-1)p$ 时, 对任意的 $0 < \alpha < 1$, 有 $W_p^{j+k}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$;

(3) 如果用 $\mathring{W}_p^{j+k}(\Omega)$ 代替 $W_p^{j+k}(\Omega)$, 上面的紧嵌入也都成立.

### 2.13.3 反例

**例 2.13.1** 对于 $p > 1$, $kp = n$ 的情况, 我们将构造一个函数 $u \in W_p^k(B_R)$, 但是 $u \notin L^\infty(B_R)$. 因此, 当 $kp = n$ 时, 对于 $p \leqslant q < \infty$ 的嵌入 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 不能推广到 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, 除非 $p = 1$, $k = n$.

取 $u(x) = \ln\left(\ln\frac{4R}{|x|}\right)$. 显然 $u \notin L^\infty(B_R)$. 利用归纳法容易验证

$$D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} P_{\alpha,j}(x)|x|^{-2|\alpha|}\left(\ln\frac{4R}{|x|}\right)^{-j},$$

其中 $P_{\alpha,j}(x)$ 是 $x$ 的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $|\alpha|$ 次齐次多项式. 因为 $p = n/k$, 我们有

$$|D^\alpha u(x)|^p \leqslant \sum_{j=1}^{|\alpha|} K_{\alpha,j}|x|^{-n|\alpha|/k}\left(\ln\frac{4R}{|x|}\right)^{-jp}.$$

于是

$$\int_{B_R}|D^\alpha u(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{j=1}^{|\alpha|}\int_0^R\left(\ln\frac{4R}{\rho}\right)^{-jp}\rho^{n-1-n|\alpha|/k}\mathrm{d}\rho.$$

如果 $|\alpha| < k$, 那么上式的右端一定是有限值. 如果 $|\alpha| = k$, 令 $\sigma = \ln\frac{4R}{\rho}$, 则有

$$\int_{B_R} |D^{\alpha}u(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant C\sum_{j=1}^{|\alpha|}\int_{\ln 4}^{\infty} \sigma^{-jp}\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $p > 1$, 故上式右端是有限值. 因此 $u \in W_p^k(B_R)$. 有趣的是, 这里的函数 $u$ 不依赖于 $k$ 和 $p$.

**例 2.13.2** 假设 $(k-1)p < n < kp$. 如果 $\alpha > k - n/p$, 我们可以构造函数 $u \in W_p^k(B_R)$, 但是 $u \notin C^{\alpha}(\overline{B}_R)$. 因此, 当 $(k-1)p < n < kp$ 并且 $\alpha > k - n/p$ 时, 没有形如 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 的嵌入.

事实上, 取 $\mu$ 满足 $k - n/p < \mu < \alpha$, $u(x) = |x|^{\mu}$ 即可.

**例 2.13.3** 假设 $n = (k-1)p$ 并且 $p > 1$. 我们将构造函数 $u \in W_p^k(B_R)$, 但是 $u \notin C^{0,1}(\overline{B}_R)$. 因此, 除非 $p = 1$ 并且 $n = k - 1$, 对于 $0 < \alpha < 1$ 成立的嵌入 $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 不能推广到 $\alpha = 1$.

事实上, 取 $u(x) = |x| \ln\left(\ln\frac{4R}{|x|}\right)$. 由于当 $|x| \to 0$ 时

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{|x - 0|} = \ln\left(\ln\frac{4R}{|x|}\right) \longrightarrow \infty,$$

所以 $u \notin C^{0,1}(\overline{B}_R)$. 同于例 2.13.1 可以证明 $u \in W_p^k(B_R)$.

**例 2.13.4** 如果 $\Omega$ 是没有锥性质的无界开集, 那么对于 $q > p$, $W_p^k(\Omega)$ 不能被嵌入到 $L^q(\Omega)$. 这样的反例非常复杂, 有兴趣的读者可以参见文献 [1] 的定理 5.30 (文献 [2] 的定理 4.46).

**例 2.13.5** 设 $x_0 \in \partial\Omega$. 如果对于任何正数 $k$ 都有

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{|\partial B_r(x_0)\cap\Omega|}{r^k} = 0,$$

就称点 $x_0$ 为 $\Omega$ 的一个指数尖点. 如果 $\Omega$ 有一个指数尖点, 并且 $q > p$, 那么 $W_p^k(\Omega)$ 不能被嵌入到 $L^q(\Omega)$. 具体例子可以参见文献 [1] 的定理 5.32 (文献 [2] 的定理 4.48).

## 2.14 作为 Banach 代数的空间 $W_p^k(\Omega)$

给定两个函数 $u,v\in W_p^k(\Omega)$，一般来说，它们的乘积 $uv$ 不一定属于 $W_p^k(\Omega)$．然而对一些特殊情况，利用嵌入定理可以证明 $uv$ 必定属于 $W_p^k(\Omega)$．

**定理 2.14.1**　*设 $\Omega$ 具有锥性质．如果 $kp>n$，那么对于任意的 $u,v\in W_p^k(\Omega)$，我们有 $uv\in W_p^k(\Omega)$，并且存在正常数 $C=C(n,k,p,V)$，使得*

$$\|uv\|_{k,p,\Omega}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}\|v\|_{k,p,\Omega},\tag{2.14.1}$$

*这里的 $V$ 是决定 $\Omega$ 的锥性质的有限锥．*

**证明**　只需证明对于 $|\alpha|\leqslant k$，成立

$$\int_\Omega|D^\alpha(uv)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_\alpha\|u\|_{k,p,\Omega}^p\|v\|_{k,p,\Omega}^p,$$

其中 $C_\alpha=C_\alpha(n,k,p,V)$．先假设 $u\in C^\infty(\Omega)$．根据 Leibniz 公式 (1.8.2)，

$$D^\alpha(uv)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v.$$

因此，只要证明对任何 $\beta\leqslant\alpha,|\alpha|\leqslant k$，估计式

$$\int_\Omega|D^\beta uD^{\alpha-\beta}v|^p\mathrm{d}x\leqslant C_{\alpha,\beta}\|u\|_{k,p,\Omega}^p\|v\|_{k,p,\Omega}^p$$

成立即可，其中 $C_{\alpha,\beta}=C_{\alpha,\beta}(n,k,p,V)$．

根据嵌入定理，对每个 $\beta$，$|\beta|\leqslant k$，存在正常数 $C_\beta=C(\beta,n,k,p,V)$，使当

$$(k-|\beta|)p<n,\quad p\leqslant r\leqslant np/[n-(k-|\beta|)p],$$

或者

$$(k-|\beta|)p=n,\quad p\leqslant r<\infty$$

时, 有

$$\int_\Omega |D^\beta w|^r \mathrm{d}x \leqslant C_\beta \|w\|^r_{k,p,\Omega}, \quad \forall\, w \in W_p^k(\Omega), \tag{2.14.2}$$

而当 $(k-|\beta|)p > n$ 时, 有

$$\|D^\beta w\|_{\infty,\Omega} \leqslant C_\beta \|w\|_{k,p,\Omega}, \quad \forall\, w \in W_p^k(\Omega). \tag{2.14.3}$$

设 $m$ 是满足 $(k-m)p > n$ 的最大非负整数. 如果 $|\beta| \leqslant m$, 则 $(k-|\beta|)p > n$, 从而由 (2.14.3) 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D^\beta u D^{\alpha-\beta} v|^p \mathrm{d}x &\leqslant C_\beta^p \|u\|^p_{k,p,\Omega} \|D^{\alpha-\beta} v\|^p_{0,p,\Omega} \\ &\leqslant C_\beta^p \|u\|^p_{k,p,\Omega} \|v\|^p_{k,p,\Omega}.\end{aligned}$$

类似地, 如果 $|\alpha-\beta| \leqslant m$, 则

$$\int_\Omega |D^\beta u D^{\alpha-\beta} v|^p \mathrm{d}x \leqslant C^p_{\alpha-\beta} \|u\|^p_{k,p,\Omega} \|v\|^p_{k,p,\Omega}.$$

如果 $|\beta| > m$ 并且 $|\alpha-\beta| > m$, 那么 $|\beta| \geqslant m+1$ 并且 $|\alpha-\beta| \geqslant m+1$ 一定成立. 所以 $n \geqslant (k-|\beta|)p$, $n \geqslant (k-|\alpha-\beta|)p$, 并且

$$\frac{n-(k-|\beta|)p}{n} + \frac{n-(k-|\alpha-\beta|)p}{n} = 2 - \frac{(2k-|\alpha|)p}{n} \leqslant 2 - \frac{kp}{n} < 1.$$

故存在 $r$ 和 $r'$, 满足 $1/r + 1/r' = 1$ 和

$$p \leqslant rp < \frac{np}{n-(k-|\beta|)p}, \quad p \leqslant r'p < \frac{np}{n-(k-|\alpha-\beta|)p}.$$

利用 Holder 不等式以及式 (2.14.2), 我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D^\beta u D^{\alpha-\beta} v|^p \mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_\Omega |D^\beta u|^{rp} \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |D^{\alpha-\beta} v|^{r'p} \mathrm{d}x\right)^{1/r'} \\ &\leqslant C_\beta^{1/r} C_{\alpha-\beta}^{1/r'} \|u\|^p_{k,p,\Omega} \|v\|^p_{k,p,\Omega}.\end{aligned}$$

因此, 对于 $u \in C^\infty(\Omega)$ 和 $v \in W_p^k(\Omega)$, 式 (2.14.1) 成立.

对于 $u \in W_p^k(\Omega)$ 的情况, 由定理 2.2.3 知, 存在 $u_j \in C^\infty(\Omega) \bigcap W_p^k(\Omega)$, 在 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_j$ 收敛到 $u$. 再由上面已证的结论知, $\{u_j v\}$ 是 $W_p^k(\Omega)$

中的 Cauchy 列, 因此在 $W_p^k(\Omega)$ 中 $u_jv$ 收敛到某个函数 $w$. 又因为 $kp > n$, 所以 $v \in C_b(\Omega)$. 于是

$$\begin{aligned}\|w - uv\|_{p,\Omega} &\leqslant \|w - u_jv\|_{p,\Omega} + \|(u_j - u)v\|_{p,\Omega}\\&\leqslant \|w - u_jv\|_{p,\Omega} + \|v\|_{\infty,\Omega}\|u_j - u\|_{p,\Omega} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

由此知, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $w = uv$. 从而 $uv = w \in W_p^k(\Omega)$, 并且

$$\begin{aligned}\|uv\|_{k,p,\Omega} &= \lim_{j\to\infty} \|u_jv\|_{k,p,\Omega}\\&\leqslant C \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{k,p,\Omega}\|v\|_{k,p,\Omega}\\&= C\|u\|_{k,p,\Omega}\|v\|_{k,p,\Omega}.\end{aligned}$$

定理得证.

我们指出, Banach 代数 $W_p^k(\Omega)$ 有单位元当且仅当 $\Omega$ 的测度是有限的, 即函数 $e(x) = 1$ 属于 $W_p^k(\Omega)$ 当且仅当 $|\Omega| < \infty$. 然而, 测度有限且具有锥性质的无界开集是不存在的.

## 2.15　关于嵌入常数的补充

从上面的讨论我们已经看出, 嵌入常数 (不等式右端的常数) 一般情况下会依赖于开集 $\Omega$. 但是在一些特殊情况下, 嵌入常数可以不依赖于 $\Omega$. 嵌入常数是否依赖于 $\Omega$, 在偏微分方程的研究中是非常重要的, 在 2.9 节关于特征值的估计 (定理 2.9.6) 中我们已经看到了这一点. 本节再给出几个右端常数不依赖于 $\Omega$ 的不等式.

1) 加权 Poincaré 不等式. 假设 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 那么

$$\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{(n-2)^2}\int_\Omega |Du(x)|^2\mathrm{d}x,\quad y \in \mathbb{R}^n,\ n > 2, \tag{2.15.1}$$

$$\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2(\ln|x-y|)^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_\Omega |Du(x)|^2\mathrm{d}x,\quad y \notin \Omega,\ n = 2. \tag{2.15.2}$$

**证明**　先把 $u$ 零延拓到 $\Omega$ 的外部, 再利用以 $y$ 为心的球坐标

$(\rho,\omega)$, 分别把 $|x-y|^{-2}\mathrm{d}x$ 和 $|x-y|^{-2}(\ln|x-y|)^{-2}\mathrm{d}x$ 写成

$$|x-y|^{-2}\mathrm{d}x=\rho^{n-3}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega=\frac{1}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{n-2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega,\quad 若\ n>2$$

和

$$\begin{aligned}|x-y|^{-2}(\ln|x-y|)^{-2}\mathrm{d}x&=\rho^{-1}(\ln\rho)^{-2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\partial}{\partial\rho}(\ln\rho)^{-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega,\quad 若\ n=2.\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上积分, 利用分部积分把导数 $\frac{\partial}{\partial\rho}$ 转到 $u^2$, 再利用 Cauchy 不等式即可证明不等式 (2.15.1) 和 (2.15.2).

类似的方法可以证明: 若 $p>0, q\neq n$, 那么

$$\int_\Omega\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^q}\mathrm{d}x\leqslant\left|\frac{p}{n-q}\right|^p\int_\Omega\frac{|Du(x)|^p}{|x-y|^{q-p}}\mathrm{d}x,\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^n,\ u\in C_0^\infty(\Omega)$$

(2.15.3)

2) 空间 $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ 中的内插不等式. 假设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 那么

$$\|u\|_{4,\Omega}^4\leqslant\|u\|_{2,\Omega}^2\|u_x\|_{2,\Omega}\|u_y\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_{2,\Omega}^2\|Du\|_{2,\Omega}^2,\quad\forall\, u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

(2.15.4)

**证明** 只需对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 证明该结论. 把 $u$ 零延拓到 $\Omega$ 的外部, 取 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $\max_x u^2(x,y)=u^2(x_0,y)$. 那么

$$\max_x u^2(x,y)=2\int_{-\infty}^{x_0}u(x,y)u_x(x,y)\mathrm{d}x=-2\int_{x_0}^{\infty}u(x,y)u_x(x,y)\mathrm{d}x$$

由此推知,

$$\max_x u^2(x,y)\leqslant\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)u_x(x,y)|\mathrm{d}x$$

同理,

$$\max_y u^2(x,y)\leqslant\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)u_y(x,y)|\mathrm{d}y$$

因而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}u^4(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\max_x u^2(x,y)\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}}\max_y u^2(x,y)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}|uu_x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^2}|uu_y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\|u\|_{2,\mathbb{R}^2}^2\|u_x\|_{2,\mathbb{R}^2}\|u_y\|_{2,\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

因为在 $\Omega$ 的外部 $u=0$, 故 (2.15.4) 成立.

利用 (2.15.4) 还可以推出: 若 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, 那么

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leqslant \|u\|_{2,\Omega}^2\prod_{j=1}^{3}\|u_{x_j}\|_{2,\Omega} \leqslant 3^{-3/2}\|u\|_{2,\Omega}^2\|Du\|_{2,\Omega}^3,\quad \forall\, u\in \mathring{W}_2^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{6,\Omega}^3 \leqslant \frac{9}{2}\prod_{j=1}^{3}\|u_{x_j}\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\|Du\|_{2,\Omega}^3,\quad \forall\, u\in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

提示. 利用

$$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x_j \leqslant \int_{\mathbb{R}}|\phi_{x_k}(x)|\mathrm{d}x_k\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|\mathrm{d}x_j,\quad \forall\, \phi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

3) 空间 $\mathring{W}_1^1(\Omega)$ 中的内插不等式.

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1},\Omega} \leqslant \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\|u_{x_j}\|_{1,\Omega}^{1/n},\quad \forall\, u\in \mathring{W}_1^1(\Omega). \tag{2.15.5}$$

**证明**　同上, 只需对 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 给出证明. 仍然把 $u$ 零延拓到 $\Omega$ 的外部.

当 $n=1$ 时, 利用

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x}u'(s)\mathrm{d}s=-\int_{x}^{\infty}u'(s)\mathrm{d}s$$

即得结论 (此时, $\|u\|_{\frac{n}{n-1},\Omega}=\|u\|_{\infty,\Omega}$).

下面假设 $n\geqslant 2$, 并且结论对于 $n-1$ 成立. 我们用归纳法证明, 结论对于 $n$ 也成立. 注意到

$$\max_{x_n}|u(x',x_n)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u_{x_n}(x',x_n)|\mathrm{d}x_n.$$

利用 Holder 不等式以及 $n=1$ 时的已知结论和 $n-1$ 时的归纳假设,

我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_n &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x_n\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u|\mathrm{d}x'\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u|^{\frac{n-1}{n-2}}\mathrm{d}x'\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\max_{x_n}|u(x',x_n)|\mathrm{d}x'\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n-1}\|u_{x_j}\|_{1,\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x_n\\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}|u_{x_n}(x',x_n)|\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x'\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n-1}\|u_{x_j}\|_{1,\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}\prod_{j=1}^{n}\|u_{x_j}\|_{1,\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

## 习题

在本章的习题中，除非特别声明我们总假设 $\partial\Omega$ 适当光滑.

**2.1** 设 $1<p<\infty$, $u\in W_p^1(0,1)$. 直接证明

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|x-y|^{1-1/p}\left(\int_0^1|u'(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\quad \text{a.e. } x,y\in(0,1).$$

**2.2** 设 $n\geqslant 2$, 取 $\Omega=B_1$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $\alpha>0$. 考察函数

$$u(x)=|x|^{-\alpha},\quad x\in\Omega,\quad x\neq 0.$$

直接计算知古典导数

$$D_iu=-\alpha\frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}},\quad |Du|=\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}},\quad x\neq 0.$$

试证明

(1) 当 $\alpha+1<n$ 时, $u$ 关于 $x_i$ 的弱导数就是 $D_iu$, 并且 $Du\in L^1(\Omega)$;

(2) $|Du|\in L^p(\Omega)$ 当且仅当 $p(\alpha+1)<n$.

**2.3** 设 $n\geqslant 2$, $\Omega=B_1$. 证明无界函数 $u=\log\log\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\in W_n^1(\Omega)$.

**2.4** 证明 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 是 Banach 空间.

**2.5** 假设 $k$ 是正整数, $\Omega$ 是有界区域并且 $\partial\Omega\in C^k$. 证明

$$\mathring{W}_p^k(\Omega)=\{u\in W_p^k(\Omega)\mid u\text{ 在 }\Omega\text{ 外取零值的延拓 }\tilde{u}\in W_p^k(\mathbb{R}^n)\}$$

**2.6** 证明注 2.2.1

**2.7** 证明引理 2.3.1

**2.8** 假设 $1\leqslant p<\infty$, $u,v\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. 利用定理 2.5.3 和定理 2.5.4 的结论以及定理 2.5.1 的证明思路, 证明 $u^+, u^-, |u|, \max\{u,v\}\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$

**2.9** 证明定理 2.5.8.

**2.10** 举例说明当 $p=1$ 时, 定理 2.5.9 的结论 (2) 不成立

**2.11** 设 $f_m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|f_m\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$ 关于 $m$ 有界. 试证明对于任何固定的 $p\in(1,\infty)$, 存在子列 $\{f_{m_j}\}\subset\{f_m\}$ 以及 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中 $f_{m_j}\longrightarrow f$.

**2.12** 设 $n=1$, $1\leqslant p<\infty$, $u\in W_p^1(0,1)$. 试证明 $u$ 与一个绝对连续函数几乎处处相等, 并且它的古典导数 $u'$(几乎处处存在) 还属于 $L^p(0,1)$. 提示: 利用定理 2.5.11 的证明方法

**2.13** 证明定理 2.6.2.

**2.14** 设 $\Omega$ 有界. 对于 $f\in L^1(\Omega)$, 定义

$$V_f(x)=\int_\Omega |x-y|^{1-n}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

试证明 $V_f(x)\in L^1(\Omega)$, 并且 $\|V_f\|_{1,\Omega}\leqslant n\omega_n^{1-1/n}|\Omega|^{1/n}\|f\|_{1,\Omega}$. 这里的 $\omega_n$ 是单位球的体积

**2.15** 把定理 2.6.7 的结果推广成整体结果. 假设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega\in C^1$, $u\in W_1^1(\Omega)$. 又设存在正常数 $K$ 和 $\alpha$ $(\alpha\leqslant 1)$, 使得

$$\int_{B_R\cap\Omega}|Du|\mathrm{d}x\leqslant KR^{n-1+\alpha},\quad \forall\, B_R\subset\mathbb{R}^n,$$

则当 $\alpha<1$ 时 $u\in C^\alpha(\overline{\Omega})$, 当 $\alpha=1$ 时 $u\in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ (整体 Lipschitz 连续函数空间), 并且还有

$$[u]_{\alpha,\Omega}\leqslant C(n,\alpha,\Omega)K$$

**2.16** 证明定理 2.7.1、定理 2.7.3 和定理 2.7.4.

**2.17** 证明定理 2.8.2 和定理 2.8.3.

**2.18** 应用分部积分证明内插不等式.

$$\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},\quad \forall\, u\in C_0^\infty(\Omega)$$

**2.19** 验证不等式 (2.11.8)

**2.20** 证明定理 2.11.5.

**2.21** 设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^1$, $p, q \geqslant 1$, $u \in W_p^1(\Omega), v \in W_q^1(\Omega)$. 试证明 $uv \in W_r^1(\Omega)$, 其中

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \quad \text{当 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} > 0 \text{ 时},$$

$$r = \min\{p, q\}, \quad \text{当 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} < 0 \text{ 时}.$$

# 第三章　各向同性的实指数 Sobolev 空间

## 3.1 Fourier 变换

为了定义实指数 Sobolev 空间，我们先简单介绍 Fourier 变换及其基本性质.

### 3.1.1 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换

设 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$，称

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\cdot y} dx$$

为 $u$ 的 Fourier 变换，有时又记 $\hat{u}(y) = \mathscr{F}[u]$. 称

$$\check{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{ix\cdot y} dx$$

为 $u$ 的Fourier逆变换，有时又记 $\check{u}(y) = \mathscr{F}^{-1}[u]$.

易证，当 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，$\hat{u}, \check{u} \in C_b(\mathbb{R}^n)$，并且

$$|\hat{u}|, |\check{u}| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

为了把上述定义扩展到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数，我们需要证明下面的定理.

**定理 3.1.1** 若 $u\in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$，则 $\hat{u},\check{u}\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且 Parseval 等式

$$\|\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}=\|\check{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}=\|u\|_{2,\mathbb{R}^n} \tag{3.1.1}$$

成立.

**证明** 首先，若 $v,w\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $\hat{v},\hat{w}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{v}(y)w(y)\mathrm{d}y \tag{3.1.2}$$

对于 $\varepsilon>0$ 及函数 $v_\varepsilon(x)=\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}$，利用

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y-t|x|^2}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|y|^2}{4t}\right),\quad t>0,$$

可得

$$\hat{v}_\varepsilon(y)=(2\varepsilon)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}\right).$$

再利用式 (3.1.2) 得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{w}(y)\mathrm{e}^{-\varepsilon|y|^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}w(x)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}\right)\mathrm{d}x. \tag{3.1.3}$$

对于 $u\in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$，记 $v(x)=\bar{u}(-x)$，$w=u*v$，这里 $\bar{u}$ 表示 $u$ 的复共轭. 不难证明

$$w\in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap C(\mathbb{R}^n),\quad \hat{w}=(2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}\in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

因为

$$\hat{v}(y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}x,$$

所以 $\hat{v}=\bar{\hat{u}}$，$\hat{w}=(2\pi)^{n/2}|\hat{u}|^2$. 又因为 $w$ 连续，易证

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}w(x)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}\right)\mathrm{d}x=(2\pi)^{n/2}w(0).$$

由于 $\widehat{w} \geqslant 0$, 在式 (3.1.3) 中令 $\varepsilon \to +0^+$ 便推知 $\widehat{w} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(y)\mathrm{d}y = (2\pi)^{n/2} w(0)$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2 \mathrm{d}y = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \mathrm{d}x$$

同理可以讨论 $\check{u}$. 证毕.

### 3.1.2　$L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数和广义函数的 Fourier 变换

利用 Parseval 等式 (3.1.1), 我们可以定义 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换.

设 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 取序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_k \longrightarrow u$. 根据 Parseval 等式 (3.1.1),

$$\|\widehat{u}_k - \widehat{u}_j\|_{2,\mathbb{R}^n} = \|\mathcal{F}[u_k - u_j]\|_{2,\mathbb{R}^n} = \|u_k - u_j\|_{2,\mathbb{R}^n}.$$

这说明 $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列, 因而在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中有极限, 把它的极限定义为 $u$ 的 Fourier 变换 $\widehat{u}$. 容易证明 $\widehat{u}$ 不依赖于逼近序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的选取. 按同样的方式可以定义 $u$ 的 Fourier 逆变换 $\check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\check{u}$ 也不依赖于逼近序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的选取. 此外, 对于 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Parseval 等式 (3.1.1) 仍然成立.

**定理 3.1.2**　设 $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则有

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} u\,\bar{v}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\mathrm{d}y$;

(2) 对于任意的多重指标 $\alpha$, 只要 $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 就有 $\widehat{D^\alpha u} = (\mathrm{i}y)^\alpha \widehat{u}$;

(3) 若 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $\mathcal{F}[u * v] = (2\pi)^{n/2}\widehat{u}\,\widehat{v}$;

(4) $u = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}]$, $u = \mathcal{F}[\check{u}]$.

**证明**　(1) 设 $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $z \in \mathbf{C}$, 则有

$$\|u + zv\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 = \|\widehat{u} + \widehat{zv}\|_{2,\mathbb{R}^n}^2$$

展开得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^2+|zv|^2+\bar{u}zv+u\bar{z}\bar{v}\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\hat{u}|^2+|\widehat{zv}|^2+\bar{\hat{u}}\,\widehat{zv}+\hat{u}\,\bar{z}\,\bar{\hat{v}}\right)\mathrm{d}y$$

再利用 Parseval 等式, 从上式便可推出

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(z\bar{u}v+\bar{z}u\bar{v}\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\left(z\,\bar{\hat{u}}\,\hat{v}+\bar{z}\,\hat{u}\,\bar{\hat{v}}\right)\mathrm{d}y$$

分别取 $z=1,\mathrm{i}$, 并把所得结果相加得

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\bar{v}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\,\bar{\hat{v}}\mathrm{d}y.$$

(2) 先设 $u$ 是具有紧支集的光滑函数. 分部积分得

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(y)&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}D^\alpha u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)D_x^\alpha(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y})\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}(\mathrm{i}y)^\alpha\mathrm{d}x\\&=(\mathrm{i}y)^\alpha\hat{u}(y)\end{aligned}$$

再考虑满足 $D^\alpha u\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数 $u$. 取 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是具有紧支集的光滑函数列, 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_j\longrightarrow u$. 那么, 对于任何具有紧支集的光滑函数 $\varphi$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi D^\alpha u_j\mathrm{d}x&=(-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u_jD^\alpha\varphi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi D^\alpha u\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这说明在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $D^\alpha u_j\rightharpoonup D^\alpha u$. 再利用

$$\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\varphi}(D^\alpha u_j-D^\alpha u)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\hat{\varphi}}(\mathcal{F}[D^\alpha u_j]-\mathcal{F}[D^\alpha u])\mathrm{d}y$$

知, 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $\mathcal{F}[D^\alpha u_j]\rightharpoonup\mathcal{F}[D^\alpha u]$.

由于 $\varphi$ 是具有紧支集的光滑函数, 所以 $\widehat{D^\alpha\varphi}(y) = (iy)^\alpha\hat{\varphi}$, 因而

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}[D^\alpha u_j]\overline{\hat{\varphi}}\,\mathrm{d}y &= \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi D^\alpha u_j\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u_j D^\alpha\varphi\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\overline{\mathcal{F}[D^\alpha\varphi]}\mathrm{d}y \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{(iy)^\alpha}\,\hat{u}\,\overline{\hat{\varphi}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(iy)^\alpha\hat{u}\,\overline{\hat{\varphi}}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由此知, 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $\mathcal{F}[D^\alpha u_j] \rightharpoonup (iy)^\alpha\hat{u}$. 由极限的唯一性知, $\mathcal{F}[D^\alpha u] = (iy)^\alpha\hat{u}$.

(3) 的证明留作习题.

(4) 容易看出, 若 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{u}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}u\check{v}\mathrm{d}x$$

成立. 根据 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换的定义, 取逼近可知上式对于 $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 仍然成立. 同时还有 $\check{v} = \overline{\mathcal{F}[\bar{v}]}$. 再利用结论 (1) 得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}]v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\check{v}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\overline{\mathcal{F}[\bar{v}]}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}uv\mathrm{d}x$$

对所有 $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立. 故有 $u = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}]$. 同理可证 $u = \mathcal{F}[\check{u}]$. 证毕.

下面, 我们定义广义函数及其 Fourier 变换.

首先定义速降函数空间 $S(\mathbb{R}^n)$, 它是由具有如下性质的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 $\varphi$ 构成的集合: 对于任意的多重指标 $\alpha$ 和任意的正整数 $k$ 都有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|D^\alpha\varphi| < \infty.$$

在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中定义收敛性 (拓扑). 设 $\varphi_m, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 称在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\varphi_m \longrightarrow \varphi$, 如果对于任意的多重指标 $\alpha$ 及任意的正整数 $k$, 都有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^k|D^\alpha\varphi_m(x)-D^\alpha\varphi(x)|\longrightarrow 0.$$

空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为速降函数.

显然有, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

**定理 3.1.3** *$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都是连续的, 并且还都是满单射 (一一映射).*

定义 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间. 通常又称 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 为广义函数空间. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为广义函数. 现在定义 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换和逆变换. 设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 对于 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 因为 $\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 所以 $\langle u,\widehat{\varphi}\rangle$ 有意义. 按照

$$\langle u,\widehat{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

的方式就确定了 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个线性泛函. 又因为 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的, 所以这个泛函也是连续的. 故唯一存在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的一个元素, 记为 $\widehat{u}$, 使得

$$\langle\widehat{u},\varphi\rangle=\langle u,\widehat{\varphi}\rangle,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

定义 $\widehat{u}$ 为 $u$ 的 Fourier 变换. 对于 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 同理可以定义 $u$ 的 Fourier 逆变换 $\check{u}$.

**定理 3.1.4** *$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 都是连续的和一一的.*

## 3.2 实指数 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的定义和基本性质

本节, 我们先用 Fourier 变换来刻画整指数 Sobolev 空间 $H^k(\mathbb{R}^n)$, 再由此引入实指数 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$. 最后讨论 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质. 对于 $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 用 $\widehat{u}$ 表示 $u$ 的 Fourier 变换.

**定理 3.2.1** *假设 $k$ 是正整数*

(1) 若 $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, 则 $(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)};$$

(2) 若 $(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}. \tag{3.2.1}$$

**证明** (1) 假设 $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. 因为对任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 有 $D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\begin{aligned}\|D^\beta u\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 &= \|\widehat{D^\beta u}\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 = \|(iy)^\beta \hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |(iy)^\beta \hat{u}|^2 \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |y_1|^{2\beta_1} \cdots |y_n|^{2\beta_n} |\hat{u}|^2 \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

取 $\beta_j = k, \beta_i = 0,\ i \neq j$, 我们有

$$\|D^\beta u\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |y_j|^{2k} |\hat{u}|^2 \mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}|^2 \mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^k |\hat{u}|^2 \mathrm{d}y \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^{2k}) |\hat{u}|^2 \mathrm{d}y \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y_1|^{2k}+\cdots+|y_n|^{2k}) |\hat{u}|^2 \mathrm{d}y \\ &\leqslant nC\|D^\beta u\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 + C\|\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 \\ &\leqslant C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2.\end{aligned}$$

(2) 设 $(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 对于任意满足 $|\beta| \leqslant k$ 的多重指标 $\beta$, 记 $w_\beta = (iy)^\beta \hat{u}$, $v_\beta = \check{w}_\beta$, 欲证 $v_\beta = D^\beta u$. 事实上, 对于任意

的 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u D^\beta g \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} u\, \overline{\overline{D^\beta g}} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, \overline{\widehat{\overline{D^\beta g}}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, \overline{(\mathrm{i}y)^\beta \hat{\bar{g}}} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\beta|} (\mathrm{i}y)^\beta \hat{u}\, \overline{\hat{\bar{g}}} \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\beta|} w_\beta\, \overline{\hat{\bar{g}}} \mathrm{d}y = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}_\beta\, \overline{\hat{\bar{g}}} \mathrm{d}y \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} v_\beta \bar{\bar{g}} \mathrm{d}y = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} v_\beta g \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

所以 $D^\beta u = v_\beta$.

现在证明式 (3.2.1). 首先,

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{|\beta| \leqslant k} \|D^\beta u\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{|\beta| \leqslant k} \|v_\beta\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{|\beta| \leqslant k} \|w_\beta\|_{2,\mathbb{R}^n}^2. \tag{3.2.2}$$

而

$$|w_\beta|^2 = |(\mathrm{i}y)^\beta \hat{u}|^2 \leqslant |y|^{2|\beta|} |\hat{u}|^2 \leqslant (1+|y|^2)^k |\hat{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

故 $w_\beta \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|w_\beta\|_{2,\mathbb{R}^n} \leqslant \|(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}$. 再利用式 (3.2.2) 知, 式 (3.2.1) 成立. 证毕.

根据定理 3.2.1, 空间 $H^k(\mathbb{R}^n)$ 还可以定义为

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|y|^2)^{k/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}.$$

这就启发我们如下定义实指数 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$.

**定义 3.2.1** 设 $s \in \mathbb{R}$. 定义实指数 Sobolev 空间

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : (1+|y|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|y|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{2,\mathbb{R}^n}.$$

易知, 若 $s \geqslant 0$, 则 $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

对于 $s \in \mathbb{R}$ 及 $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^s \hat{u}(y)\overline{\hat{v}}(y) \mathrm{d}y$$

不难验证 $(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ 满足内积的定义.

为了简化符号并节省空间, 从现在开始至 3.3 节结束, 在范数和空间中都略去 $\mathbb{R}^n$. 例如, 把范数 $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ 和 $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}^n}$ 分别简写成 $\|\cdot\|_{H^s}$ 和 $\|\cdot\|_2$, 把空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 分别简写成 $H^s$ 和 $L^2$, 等等.

**定理 3.2.2**　*$H^s$ 是 Hilbert 空间.*

**证明**　为了证明 $H^s$ 是 Hilbert 空间, 只需证明 $H^s$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^s}$ 是完备的. 假设 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $H^s$ 中的一个基本列, 即当 $m,k\to\infty$ 时

$$\|(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}_m(y)-(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}_k(y)\|_2\longrightarrow 0.$$

这说明 $\{(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $L^2$ 中的基本列, 因而在 $L^2$ 中 $(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}_m$ 收敛于某个 $w$. 记 $\widehat{u}=(1+|y|^2)^{-s/2}w$, 易证 $\widehat{u}\in\mathcal{S}'$. 于是

$$u:=\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}]\in\mathcal{S}',\quad (1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}=w\in L^2,$$

即 $u\in H^s$, 并且在 $L^2$ 中,

$$(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}_m\longrightarrow w=(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u},$$

亦即在 $H^s$ 中 $u_m\longrightarrow u$. 证毕.

**定理 3.2.3**　*$C_0^{\infty}$ 在 $H^s$ 中稠密.*

**证明**　先证明 $\mathcal{S}$ 在 $H^s$ 中稠密. 定义 $H^s$ 到 $L^2$ 的线性变换

$$T^s u=\mathcal{F}^{-1}[(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}].$$

根据 $H^s$ 的定义及 Parseval 等式, $\|u\|_{H^s}=\|T^s u\|_2$. 这说明 $T^s$ 是保范的, 故是单射. 再证明 $T^s$ 是满射. 对于任给的 $u_*\in L^2$, 由 $\widehat{u}_*\in L^2$ 知, $w:=\widehat{u}_*(1+|y|^2)^{-s/2}\in\mathcal{S}'$, $u:=\mathcal{F}^{-1}[w]\in\mathcal{S}'$. 于是

$$\widehat{u}=w=\widehat{u}_*(1+|y|^2)^{-s/2},\quad \widehat{u}(1+|y|^2)^{s/2}=\widehat{u}_*\in L^2,$$

因而, $u\in H^s$ 并且

$$T^s u=\mathcal{F}^{-1}[(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}]=\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}_*]=u_*.$$

这说明 $T^s$ 是满射, 从而是满单射. 记 $T^s$ 的逆变换为 $T^{-s}$. 利用定理 3.1.3 易知 $T^sS\subset S$, $T^{-s}S\subset S$. 给定 $u\in H^s$, 则 $T^su\in L^2$. 由于 $S$ 在 $L^2$ 中稠密, 故存在 $v_j\in S$ 使得 $\|v_j-T^su\|_2\longrightarrow 0$. 这样就有

$$\|T^{-s}v_j-u\|_{H^s}=\|T^s(T^{-s}v_j-u)\|_2=\|v_j-T^su\|_2\longrightarrow 0.$$

因为 $T^{-s}v_j\in S$, 所以 $S$ 在 $H^s$ 中稠密.

再证 $C_0^\infty$ 在 $S$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{H^s}$ 稠密. 取定一个大于 $s$ 的正整数 $k$. 因为 $S\subset H^k$, 由定理 2.3.2 知, $C_0^\infty$ 在 $S$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{H^k}$ 稠密. 又因为 $\|\cdot\|_{H^s}\leqslant\|\cdot\|_{H^k}$, 所以 $C_0^\infty$ 在 $S$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{H^s}$ 也稠密. 证毕.

若记 $H_0^s$ 是 $C_0^\infty$ 在 $H^s$ 范数下的完备化空间, 那么 $H_0^s=H^s$.

**定理 3.2.4** 假设 $u,u_j\in H^s$, $v,v_j\in H^{-s}$, 并且在 $H^s$ 中 $u_j\longrightarrow u$, 在 $H^{-s}$ 中 $v_j\longrightarrow v$, 那么

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}_j(y)\overline{\widehat{v}}_j(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(y)\overline{\widehat{v}}(y)\,\mathrm{d}y;$$

同时还有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(y)\overline{\widehat{v}}(y)\mathrm{d}y\leqslant\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s}}.$$

**证明** 首先, 改写

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}_j(y)\overline{\widehat{v}}_j(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}_j(y)(1+|y|^2)^{s/2}\overline{\widehat{v}}_j(y)(1+|y|^2)^{-s/2}\mathrm{d}y \quad (3.2.3)$$

因为在 $H^s$ 中 $u_j\longrightarrow u$, 在 $H^{-s}$ 中 $v_j\longrightarrow v$, 所以在 $L^2$ 中

$$\widehat{u}_j(y)(1+|y|^2)^{s/2}\longrightarrow\widehat{u}(y)(1+|y|^2)^{s/2}\triangleq(A_su)(y),$$

$$\widehat{v}_j(y)(1+|y|^2)^{-s/2}\longrightarrow\widehat{v}(y)(1+|y|^2)^{-s/2}\triangleq(A_{-s}u)(y).$$

由此及式 (3.2.3) 得

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}_j(y)\overline{\widehat{v}}_j(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}(A_su)(y)\,\overline{(A_{-s}v)}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(y)\overline{\widehat{v}}(y)\mathrm{d}y.$$

显然有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(y)\overline{\widehat{v}}(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\|A_su\|_2\|A_{-s}v\|_2=\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s}}.$$

**定理 3.2.5**　如果 $v\in H^{-s}$, 那么

$$\|v\|_{H^{-s}}=\sup_{\substack{u\in H^s\\ \|u\|_{H^s}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(y)\bar{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y=\sup_{\substack{u\in\mathcal{S}\\ \|u\|_{H^s}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(y)\bar{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y.$$

**证明**　对于 $u\in H^s$, 同上定义线性算子

$$(A_su)(y)=\hat{u}(y)(1+|y|^2)^{s/2},$$

那么 $A_s: H^s\longrightarrow L^2$ 是保范的, 当然是单射. 对于任给的 $u_*\in L^2$, 若记 $u=\mathcal{F}^{-1}[u_*(y)(1+|y|^2)^{-s/2}]$, 则 $u\in H^s$ 并且 $A_su=u_*$. 这说明 $A_s$ 是满单射, 因而它的逆算子 $A_s^{-1}: L^2\longrightarrow H^s$ 存在.

对于 $v\in H^{-s}$, 记 $v_*(y)=(A_{-s}v)(y)$, 那么 $v_*\in L^2$, $\|v_*\|_{L^2}=\|v\|_{H^{-s}}$, 并且

$$\|v_*\|_2=\sup_{\substack{g\in L^2\\ \|g\|_2=1}}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\,\overline{v_*}(y)\mathrm{d}y.$$

对于 $u\in H^s$, 若令 $g=A_su$, 则 $\|g\|_2=\|u\|_{H^s}$, 并且 $u\longrightarrow g$ 是一一的. 因此

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^{-s}}&=\|v_*\|_2\\&=\sup_{\substack{u\in H^s\\ \|u\|_{H^s}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}(A_su)(y)\,\overline{(A_{-s}v)}(y)\mathrm{d}y\\&=\sup_{\substack{u\in H^s\\ \|u\|_{H^s}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(y)\,\bar{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

**定理 3.2.6**　设 $\varphi(u)$ 是 $H^s$ 上的一个线性连续泛函, 那么存在唯一的 $v\in H^{-s}$, 使得

$$\varphi(u)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(y)\bar{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y,\quad\forall\, u\in H^s,$$

$$\|\varphi\|=\|v\|_{H^{-s}}.$$

**证明**　考虑上面定义的映射 $A_s: H^s\longrightarrow L^2$, 并简记 $u_*=A_su$. 那么 $u=A_s^{-1}u_*$, $\|u\|_{H^s}=\|u_*\|_2$, 并且 $A_s^{-1}: L^2\longrightarrow H^s$ 是满单射. 按照如下方式定义 $L^2$ 上的一个泛函 $\tilde{\varphi}(u_*)$:

$$\tilde{\varphi}(u_*)=\varphi(A_s^{-1}u_*)=\varphi(u)$$

显然 $\tilde{\varphi}$ 是 $L^2$ 上的线性连续泛函. 由 Riesz 表示定理知, 存在唯一的 $w \in L^2$, 使得

$$\tilde{\varphi}(u_*) = \int_{\mathbb{R}^n} u_*(y)\overline{w}(y)\mathrm{d}y, \quad \forall\, u_* \in L^2,$$

并且 $\|\tilde{\varphi}\| = \|w\|_2$. 于是

$$\varphi(u) = \tilde{\varphi}(u_*) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)(1+|y|^2)^{s/2}\overline{w}(y)\mathrm{d}y, \quad \forall\, u \in H^s.$$

若记 $v(x) = \mathscr{F}^{-1}[w(y)(1+|y|^2)^{s/2}]$, 则 $\hat{v}(y) = w(y)(1+|y|^2)^{s/2}$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(y)|^2(1+|y|^2)^{-s}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |w(y)|^2\mathrm{d}y, \quad \varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\overline{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y.$$

因为 $w \in L^2$, 所以 $v \in H^{-s}$, 并且 $\|v\|_{H^{-s}} = \|w\|_2$. 故有

$$\|\varphi\| = \sup_{0\neq u\in H^s} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_{H^s}} = \sup_{0\neq u_*\in L^2} \frac{|\tilde{\varphi}(u_*)|}{\|u_*\|_2} = \|\tilde{\varphi}\| = \|w\|_2 = \|v\|_{H^{-s}}.$$

证毕.

由定理 3.2.4 和定理 3.2.5 知, 对于给定的 $v \in H^{-s}$, 泛函

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\overline{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y$$

是 $H^s$ 上的线性连续泛函, 并且

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{u\in H^s\\ \|u\|=1}} |\varphi(u)| = \sup_{\substack{u\in H^s\\ \|u\|=1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\overline{\hat{v}}(y)\mathrm{d}y\right| = \|v\|_{H^{-s}}.$$

再利用定理 3.2.6 知, $H^{-s}$ 是 $H^s$ 的对偶空间.

## 3.3　$H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的嵌入定理、内插不等式和内在范数

本节讨论空间 $H^s$ 中的嵌入定理、内插不等式和内在范数.

### 3.3.1　嵌入定理

我们在第二章中的 2.7 节和 2.8 节讨论了空间 $W_p^k(\Omega)$ 的嵌入定理, 本节讨论空间 $H^s$ 的嵌入定理.

**定理 3.3.1** 当 $s \geqslant t \geqslant 0$ 时, $H^s \hookrightarrow H^t$.

**证明** 因为 $s \geqslant t$, 所以

$$\|u\|_{H^t} = \|(1+|y|^2)^{t/2}\widehat{u}\|_2 \leqslant \|(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}\|_2 = \|u\|_{H^s}.$$

**定理 3.3.2** 如果 $s > n/2$, 则 $H^s \hookrightarrow C_b$.

**证明** 因为 $s > n/2$, 所以 $(1+|y|^2)^{-s/2} \in L^2$. 于是, 当 $u \in H^s$ 时,

$$\widehat{u}(y) = (1+|y|^2)^{-s/2}(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}(y) \in L^1.$$

因此, Fourier 变换的反演公式成立:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(y)e^{ix\cdot y}dy,$$

并且 $u$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 同时还有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-s/2}(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}(y)e^{ix\cdot y}dy\right| \\ &\leqslant C_1\|(1+|y|^2)^{-s/2}\|_2\|(1+|y|^2)^{s/2}\widehat{u}\|_2 \\ &= C\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

**定理 3.3.3** 假定 $k$ 是非负整数, $s > n/2 + k$, 那么 $H^s \hookrightarrow C_b^k$.

**证明** 设 $u \in H^s$, $\beta$ 是多重指标, 则当 $|\beta| \leqslant k$ 时,

$$D^\beta u \in H^{s-|\beta|} \hookrightarrow H^{s-k} \hookrightarrow C_b,$$

故 $u \in C_b^k$. 同于定理 3.3.2 的证明,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta u(x)| &\leqslant C\|D^\beta u\|_{H^{s-|\beta|}} \\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(1+|y|^2)^{(s-|\beta|)/2}\widehat{D^\beta u}|^2dy\right)^{1/2} \\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(1+|y|^2)^{(s-|\beta|)/2}y^\beta\widehat{u}|^2dy\right)^{1/2} \\ &\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{s-|\beta|}(1+|y|^2)^{|\beta|}|\widehat{u}|^2dy\right)^{1/2} \\ &= C\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

**定理 3.3.4** 假设 $s = k + n/2 + \lambda$, $k$ 是非负整数, $\lambda \in (0,1)$, 则 $H^s \hookrightarrow C^{k,\lambda}$.

**证明** 因为 $\lambda > 0$, 所以 $s > k + n/2$. 由定理 3.3.3 知 $H^s \hookrightarrow C_b^k$. 再证当 $|\beta| = k$ 时, $D^\beta u$ 是具有指数 $\lambda$ 的 Hölder 连续函数. 事实上, 根据

$$D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)(iy)^\beta \left(e^{i(x+h)\cdot y} - e^{ix\cdot y}\right)dy,$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
|D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)y^\beta|\,|e^{ih\cdot y} - 1|dy \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)|(1+|y|)^{k+n/2+\lambda}\frac{|e^{ih\cdot y} - 1|}{|y|^{n/2+\lambda}}dy \\
&\leqslant C\|u\|_{H^s}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{ih\cdot y} - 1|^2}{|y|^{n+2\lambda}}dy\right)^{1/2}. \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

记

$$I(h) = I(h, n+2\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{ih\cdot y} - 1|^2}{|y|^{n+2\lambda}}dy.$$

若能证明 $I(h) = C(n,\lambda)|h|^{2\lambda}$, 再结合式 (3.3.1) 便得

$$|D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^s}|h|^\lambda.$$

这说明 $D^\beta u$ 是具有指数 $\lambda$ 的 Hölder 连续函数.

下面证明 $I(h) = C(n,\lambda)|h|^{2\lambda}$. 设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个旋转变换, 则

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{R}h) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{i(\mathcal{R}h)\cdot y} - 1\right|^2|y|^{-n-2\lambda}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{ih\cdot(\mathcal{R}^T y)} - 1\right|^2|y|^{-n-2\lambda}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{ih\cdot z} - 1\right|^2|z|^{-n-2\lambda}dz \\
&= I(h).
\end{aligned}$$

这说明 $I(h)$ 在旋转变换下是不变的. 用 $\mathcal{R}$ 表示把 $h$ 旋转到 $h_1$ 轴上的变换, 并记 $e=(1,0,\cdots,0)$, 那么

$$I(h)=I(\mathcal{R}h)=I(|h|e)=\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{i|h|e\cdot y}-1\right|^2|y|^{-n-2\lambda}\mathrm{d}y.$$

令 $|h|y=z$, 我们有

$$I(h)=\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{ie\cdot z}-1\right|^2|z|^{-n-2\lambda}|h|^{2\lambda}\mathrm{d}z=|h|^{2\lambda}I(e).$$

由于在 $|z|=0$ 的附近

$$\left|e^{ie\cdot z}-1\right|^2|z|^{-n-2\lambda}=O\left(|z|^{-n+2(1-\lambda)}\right),$$

而当 $|z|\longrightarrow\infty$ 时

$$\left|e^{ie\cdot z}-1\right|^2|z|^{-n-2\lambda}=O\left(|z|^{-n-2\lambda}\right),$$

并且 $\lambda>0$, 所以 $I(e)<\infty$. 故有 $I(h)=C|h|^{2\lambda}$. 证毕.

### 3.3.2 内插不等式和内在范数

我们先讨论空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的内插不等式.

**定理 3.3.5** 设 $s<r$, $\theta\in(0,1)$, $u\in H^r$, 则 $u\in H^{\theta s+(1-\theta)r}$, 并且

$$\|u\|_{H^{\theta s+(1-\theta)r}}\leqslant\|u\|_{H^s}^{\theta}\|u\|_{H^r}^{1-\theta}.$$

**证明** 利用 Holder 不等式得

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{\theta s+(1-\theta)r}}&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^{\theta s+(1-\theta)r}\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^s\right]^{\theta}\left[|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^r\right]^{1-\theta}\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\
&\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^s\mathrm{d}y\right)^{\theta/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^r\mathrm{d}y\right)^{(1-\theta)/2}\\
&=\|u\|_{H^s}^{\theta}\|u\|_{H^r}^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

**推论 3.3.1** *设 $0\leqslant s<r<\rho$. 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C=C(\varepsilon)>0$, 使得对所有 $u\in H^\rho$, 都有*

$$\|u\|_{H^r}\leqslant \varepsilon\|u\|_{H^\rho}+C(\varepsilon)\|u\|_{H^s}.$$

**证明** 存在 $\theta\in(0,1)$, 满足 $r=\theta s+(1-\theta)\rho$. 利用定理 3.3.5 及 Young 不等式便推得

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^r}&\leqslant \|u\|_{H^s}^{\theta}\|u\|_{H^\rho}^{1-\theta}\\&=\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\|u\|_{H^\rho}\right)^{1-\theta}\left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{(\theta-1)/\theta}\|u\|_{H^s}\right]^{\theta}\\&\leqslant \varepsilon\|u\|_{H^\rho}+\theta\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{(\theta-1)/\theta}\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

故结论成立. 证毕.

接下来, 我们讨论空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的内在范数. 利用 Fourier 变换描述 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 及其范数, 从数学的角度看非常简单明确, 在推导嵌入定理及范数的内插不等式时也非常方便. 但是这种范数不是由函数的自身结构直接确定的, 而是由它的 Fourier 变换给出. 对于不少函数, 求它们的 Fourier 变换是非常困难的, 尤其是复合函数的 Fourier 变换, 没有现成的公式可用. 因而, 给出一个用函数的自身结构表示的 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 范数公式是必要的. 另一方面, 在一般开集 $\Omega$ 上也没有 Fourier 变换. 为了在一般开集 $\Omega$ 上定义 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$, 并保持 $H^s(\Omega)$ 与 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的一致性, 也需要对 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 给出一种脱离 Fourier 变换的描述方式.

为此, 我们先证明三个引理.

**引理 3.3.1** *设 $s=k+\lambda$, 其中 $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$. 那么 $u\in H^s$ 的充分必要条件是 $u\in H^k$ 并且 $D^\beta u\in H^\lambda$ 对所有满足 $|\beta|=k$ 的多重指标 $\beta$ 成立. 同时还存在常数 $C>0$, 使得*

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^s}^2\leqslant\|u\|_{H^k}^2+\sum_{|\beta|=k}\|D^\beta u\|_{H^\lambda}^2\leqslant C\|u\|_{H^s}^2. \tag{3.3.2}$$

**证明**　先设 $u\in H^s$. 因为 $s>k$, 由嵌入定理知 $u\in H^k$. 注意到 $|\widehat{D^\beta u}|=|y^\beta\hat{u}|$, 利用不等式

$$|y|^{2k}(1+|y|^2)^\lambda\leqslant(1+|y|^2)^{k+\lambda}$$

知, 当 $|\beta|=k$ 时

$$(1+|y|^2)^\lambda|\widehat{D^\beta u}|^2\leqslant|y|^{2k}(1+|y|^2)^\lambda|\hat{u}|^2\leqslant(1+|y|^2)^{k+\lambda}|\hat{u}|^2\in L^1,$$

即 $D^\beta u\in H^\lambda$. 必要性得证.

利用不等式

$$(1+|y|^2)^{k+\lambda}\leqslant 2^\lambda(1+|y|^2)^k+2^k|y|^{2k}(1+|y|^2)^\lambda,$$

易证充分性. 具体细节以及估计式 (3.3.2) 的证明留给读者.

**引理 3.3.2**　设 $s\in[0,1]$, 则对于任意的 $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|u\|_{H^s}^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|y|^{2s})\mathrm{d}y\leqslant 2\|u\|_{H^s}^2.$$

**证明**　由 $s\in[0,1]$ 易知, 对于任意的 $x\geqslant 0$, 有 $(1+x)^s\leqslant 1+x^s$. 于是

$$|\hat{u}|^2(1+|y|^2)^s\leqslant|\hat{u}|^2(1+|y|^{2s}),$$

故结论的前一个不等式成立. 又因为 $1+|y|^{2s}\leqslant 2(1+|y|^2)^s$, 所以结论的后一个不等式也成立. 证毕.

为了书写方便, 我们先引入一个记号. 对于 $1\leqslant p<\infty$ 以及 $s\in(0,1)$, 记

$$[u]_{p,s,\Omega}=\left(\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

它是指数为 $s$ 的实指数半模.

**引理 3.3.3**　设 $s\in(0,1)$, $u\in L^2$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|\xi|^{2s})\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{C(n,s)}[u]_{2,s,\mathbb{R}^n}^2,$$

其中

$$C(n,s)=\int_{\mathbb{R}^n}|e^{ie\cdot y}-1|^2|y|^{-n-2s}\mathrm{d}y,\quad e=(1,0,\cdots,0).$$

**证明**　首先，由 Parseval 等式知，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}|^2\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\mathrm{d}x.$$

令 $x-y=x'$，再把 $x'$ 记成 $x$ 得

$$\begin{aligned}
[u]_{2,s,\mathbb{R}^n}^2&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|u(x+y)-u(y)|^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|u(x+\cdot)-u(\cdot)\|_{L^2}^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

再次利用 Parseval 等式，

$$\begin{aligned}
[u]_{2,s,\mathbb{R}^n}^2&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\mathcal{F}[u(x+\cdot)-u(\cdot)]\|_{L^2}^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\mathcal{F}[u(x+\cdot)](\xi)-\mathcal{F}[u(\cdot)](\xi)\|_{L^2}^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|e^{ix\cdot\xi}-1|^2|\widehat{u}|^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{ix\cdot\xi}-1|^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

由定理 3.3.4 的证明知

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{ix\cdot\xi}-1|^2}{|x|^{n+2s}}\mathrm{d}x=C(n,s)|\xi|^{2s},$$

故有

$$[u]_{2,s,\mathbb{R}^n}^2=C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}|^2|\xi|^{2s}\mathrm{d}\xi.$$

从而

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2(1+|\xi|^{2s})\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2|\xi|^{2s}\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C(n,s)}[u]^2_{2,s,\mathbb{R}^n}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{C(n,s)}[u]^2_{2,s,\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}
$$

**定理 3.3.6** *设 $s=k+\lambda$，其中 $k$ 是非负整数，$\lambda\in(0,1)$，则存在正常数 $C=C(n,s)$，使得对任意的 $u\in H^s$，有*

$$
\frac{1}{C}\|u\|^2_{H^s}\leqslant\sum_{|\beta|\leqslant k}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\beta u|^2\mathrm{d}x+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}\leqslant C\|u\|^2_{H^s}. \quad (3.3.3)
$$

**证明**　由引理 3.3.1 知，

$$
\frac{1}{C}\|u\|^2_{H^s}\leqslant\|u\|^2_{H^k}+\sum_{|\beta|=k}\|D^\beta u\|^2_{H^\lambda}\leqslant C\|u\|^2_{H^s}.
$$

根据引理 3.3.2，

$$
\|D^\beta u\|^2_{H^\lambda}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^\beta u}|^2(1+|y|^{2\lambda})\mathrm{d}y\leqslant 2\|D^\beta u\|^2_{H^\lambda}.
$$

再由引理 3.3.3 又知，

$$
\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^\beta u}|^2(1+|y|^{2\lambda})\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}|D^\beta u|^2\mathrm{d}x+C[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^s}&\leqslant C\Big(\|u\|^2_{H^k}+\sum_{|\beta|=k}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^\beta u}|^2(1+|y|^{2\lambda})\mathrm{d}y\Big)\\
&= C\Big(\|u\|^2_{H^k}+\sum_{|\beta|=k}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\beta u|^2\mathrm{d}x+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}\Big)\\
&\leqslant C\Big(\|u\|^2_{H^k}+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}\Big).
\end{aligned}
$$

故式 (3.3.3) 的第一个不等式成立．同理可证式 (3.3.3) 的第二个不等式．定理得证．

该定理给出了当 $s>0$ 时, $H^s$ 的另一种定义及等价范数

$$H^s=\left\{u\in H^k:\ \frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^{n/2+\lambda}}\in L^2(\mathbb{R}^{2n}),\ \forall\,|\beta|=k\right\},$$

$$\|u\|_{H^s}=\left(\|u\|_{H^k}^2+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}^2\right)^{1/2}.$$

这里 $s=k+\lambda$, $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$, $[D^\beta u]_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}$ 是实指数半模.

## 3.4 空间 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 上的迹定理

对于 $s=k+\lambda$, 其中 $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$, 受上节关于空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的另一种定义及等价范数的启发, 我们定义

$$H^s(\mathbb{R}^n_+)=\left\{u\in H^k(\mathbb{R}^n_+):\ \frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^{n/2+\lambda}}\in L^2(\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+),\ \forall\,|\beta|=k\right\},$$

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}=\left(\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n_+)}^2+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{2,\lambda,\mathbb{R}^n_+}^2\right)^{1/2}.$$

为了讨论 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 上的迹, 先讨论 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 到 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的延拓.

**定理 3.4.1** *设 $s>0$, 那么存在从 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 到 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性延拓算子 $E$, 使得对每个 $u\in H^s(\mathbb{R}^n_+)$, 有*

*(1) 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上 $Eu=u$ 几乎处处成立;*

*(2) $\|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}$.*

**证明** 记 $s=k+\lambda$, 其中 $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$. 记 $E$ 是由式 (2.3.2) 确定的算子, 那么结论 (1) 成立. 为了证明结论 (2), 根据引理 2.3.2, 只需再估计

$$[D^\beta(Eu)]_{2,\lambda,\mathbb{R}^n}^2=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|D^\beta(Eu(x))-D^\beta(Eu(y))|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $|\beta|=k$. 把该积分写成

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_+}+\int_{\mathbb{R}^n_-}\int_{\mathbb{R}^n_-}+2\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_-}\triangleq I_1+I_2+2I_3,$$

那么

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n_+} \leqslant \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n_+)},\\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n_-}\int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\left|\sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n}\left[D^\beta u(x', -jx_n) - D^\beta u(y', -jy_n)\right]\right|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\left|\sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n}\left[D^\beta u(x', jx_n) - D^\beta u(y', jy_n)\right]\right|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant C[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n_+},\\
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\left|D^\beta u(x', x_n) - \sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n} D^\beta u(y', -jy_n)\right|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\left|\sum_{j=1}^{k+1} c_j(-j)^{\beta_n}\left[D^\beta u(x', x_n) - D^\beta u(y', -jy_n)\right]\right|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{k+1}\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{|D^\beta u(x', x_n) - D^\beta u(y', -jy_n)|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= C\sum_{j=1}^{k+1}\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|D^\beta u(x', x_n) - D^\beta u(y', y_n)|^2}{j(|x'-y'|^2 + |x_n + y_n/j|^2)^{n/2+\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant C[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n_+}.
\end{aligned}
$$

因而 $[D^\beta(Eu)]^2_{2,\lambda,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}$. 证毕.

根据定理 3.4.1, 在下面的定理 3.4.2、推论 3.4.1 和定理 3.4.3 中, 可以用 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 代替 $H^s(\mathbb{R}^n)$, 得到的结果就是 $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ 上的迹定理.

定义迹算子

$$
\gamma_0: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}),\quad (\gamma_0 u)(x') = u(x', 0).
$$

**定理 3.4.2**　当 $s > 1/2$ 时, $\gamma_0$ 可以被连续地延拓成 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ 的线性算子, 仍记为 $\gamma_0$, 并且还有

$$
\|\gamma_0 u\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},\quad \forall\, u \in H^s(\mathbb{R}^n).
$$

**证明** **第一步** 当 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时,

$$u(x) = u(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(y', y_n) e^{ix_n \cdot y_n} e^{ix' \cdot y'} dy' dy_n,$$

$$(\gamma_0 u)(x') = u(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot y'} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y', y_n) dy_n \right) dy'$$

由此知 (见定理 3.1.2 的 (4))

$$\widehat{\gamma_0 u}(y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y', y_n) dy_n.$$

故有

$$|\widehat{\gamma_0 u}(y')|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(y)|^2 (1 + |y|^2)^s dy_n \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |y'|^2 + y_n^2)^{-s} dy_n \tag{3.4.1}$$

因为 $s > 1/2$, 所以第二个积分收敛, 并且 (记 $a = \sqrt{1 + |y'|^2}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + y_n^2)^s} dy_n = a^{1-2s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^s} dt \triangleq c_s a^{1-2s},$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |y'|^2 + y_n^2)^{-s} dy_n = c_s (1 + |y'|^2)^{\frac{1}{2} - s} \tag{3.4.2}$$

根据式 (3.4.1) 和式 (3.4.2),

$$|\widehat{\gamma_0 u}(y')|^2 (1 + |y'|^2)^{s - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{c_s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(y)|^2 (1 + |y|^2)^s dy_n.$$

在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分上式得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{\gamma_0 u}(y')|^2 (1 + |y'|^2)^{s - \frac{1}{2}} dy' \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(y)|^2 (1 + |y|^2)^s dy.$$

由此知

$$\|\gamma_0 u\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.4.3}$$

**第二步** 因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 对于任给的 $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 存在 $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|u_j - u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \to 0$. 根据式 (3.4.3),

$$\|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u_m\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \|u_j - u_m\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0. \tag{3.4.4}$$

这表明 $\{\gamma_0 u_j\}$ 是空间 $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中的一个 Cauchy 列. 因而存在 $v\in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, 在 $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ 中 $\gamma_0 u_j \longrightarrow v$. 定义 $\gamma_0 u = v$. 由式 (3.4.4) 知, 这样定义的 $\gamma_0 u$ 与逼近序列 $\{u_j\}$ 的取法无关. 又因为式 (3.4.3) 对于 $u_j$ 成立, 所以对于 $u$ 也成立. 另外, 从上面的讨论容易看出, 按照这种方式延拓的算子 $\gamma_0: H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ 还是线性的. 证毕.

注意到这样的事实: 若 $s>1$, $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, 那么 $Du\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ 并且

$$\|Du\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

我们有下面的推论.

**推论 3.4.1** 设 $k$ 是正整数, $s>k+1/2$, 那么迹算子

$$\gamma_j = \gamma_0\circ\partial_{x_n}^j : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

是连续的, $j=0,1,\cdots,k$, 并且还有

$$\|\gamma_j u\|_{H^{s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C_j\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

**定理 3.4.3** 设 $k$ 是正整数, $s>k+1/2$. 记

$$H^{(s-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\times H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\times\cdots\times H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

那么存在一个线性连续算子

$$P: H^{(s-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n),$$

具有如下性质: 若 $\phi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_k)\in H^{(s-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1})$, $u=P\phi\in H^s(\mathbb{R}^n)$, 则 $\phi_j=\gamma_j u$, $j=0,1,\cdots,k$, 并且还有

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\phi\|_{H^{(s-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1})} = C\sum_{j=0}^{k}\|\phi_j\|_{H^{s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

**证明** 取函数 $h\in C_0^\infty(\mathbb{R})$，$0\leqslant h(t)\leqslant 1$，并且当 $|t|\leqslant 1$ 时 $h(t)=1$. 对于 $\phi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_k)\in H^{(s-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1})$ 令

$$V(y',x_n)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}x_n^j\hat{\phi}_j(y')h(x_n\sqrt{1+|y'|^2}),\quad y'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n\in\mathbb{R},$$

这里 $\hat{\phi}_j(y')$ 是 $\phi_j(x')$ 的 Fourier 变换. 显然,

$$V(y',0)=\hat{\phi}_0(y'),\quad \partial_{x_n}^jV(y',0)=\hat{\phi}_j(y'),\ j=1,\cdots,k.$$

记 $\hat{V}(y',y_n)$ 是 $V(y',x_n)$ 关于 $x_n$ 的 Fourier 变换. 注意到如下事实

$$\mathcal{F}[x_n^j g(x_n)]=i^j\hat{g}^{(j)}(y_n)=i^j\frac{\mathrm{d}^j\hat{g}(y_n)}{\mathrm{d}y_n^j},$$

$$\mathcal{F}[g(rx_n)]=\frac{1}{r}\hat{g}(y_n/r),\quad \mathcal{F}[x_n^j g(rx_n)]=i^j\frac{1}{r^{j+1}}\hat{g}^{(j)}(y_n/r),$$

我们有

$$\hat{V}(y',y_n)=\sum_{j=0}^{k}\frac{i^j}{j!}\hat{\phi}_j(y')(1+|y'|^2)^{-\frac{j+1}{2}}\hat{h}^{(j)}\left(\frac{y_n}{\sqrt{1+|y'|^2}}\right).$$

记 $u(x)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{V}(y',y_n)]$, 那么

$$\hat{u}(y)=\hat{V}(y',y_n)=\sum_{j=0}^{k}\frac{i^j}{j!}\hat{\phi}_j(y')(1+|y'|^2)^{-\frac{j+1}{2}}\hat{h}^{(j)}\left(\frac{y_n}{\sqrt{1+|y'|^2}}\right).$$

因而

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2&=\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(y)|^2(1+|y|^2)^s\mathrm{d}y\\&\leqslant C\sum_{j=0}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\phi}_j(y')|^2(1+|y'|^2)^{-j-1}\\&\qquad\left|\hat{h}^{(j)}\left(\frac{y_n}{\sqrt{1+|y'|^2}}\right)\right|^2(1+|y|^2)^s\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令 $\tau = y_n/\sqrt{1+|y'|^2}$, 则有

$$1+|y|^2 = 1+|y'|^2+y_n^2 = (1+|y'|^2)(1+\tau^2)$$

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=0}^{k}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\hat{\phi}_j(y')|^2(1+|y'|^2)^{s-j-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y' \times \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{h}^{(j)}(\tau)\right|^2(1+|\tau|^2)^s\mathrm{d}\tau$$

因为 $h\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 所以 $\hat{h}\in H^s(\mathbb{R})$, 故

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{h}^{(j)}(\tau)\right|^2(1+|\tau|^2)^s\mathrm{d}\tau = C(j,s) < \infty.$$

最后得到

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=0}^{k}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\hat{\phi}_j(y')|^2(1+|y'|^2)^{s-j-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y' = C\sum_{j=0}^{k}\|\phi_j\|^2_{H^{s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

定义算子 $P$: $P\phi = u$. 那么 $P: H^{(s-j-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^s(\mathbb{R}^n)$. 关于 $P$ 是线性连续算子以及 $\gamma_j u = \phi_j$ $(j=0,1,\cdots,k)$ 的证明留作习题. 定理得证.

推论 3.4.1 和定理 3.4.3 说明, 存在一个从 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{(s-j-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^{n-1})$ 的一一映射 $\gamma$, 并且 $\gamma$ 和 $\gamma^{-1}$ 都是线性连续的.

## 3.5 空间 $H^s(\Omega)$ 和 $W_p^s(\Omega)$

设 $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$, $s=k+\lambda$. 受 3.3.2 节得到的空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的另一种定义及等价范数的启发, 我们如下定义空间 $H^s(\Omega)$ 及 $W_p^s(\Omega)$:

$$H^s(\Omega) = \left\{u\in H^k(\Omega):\ \frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^{n/2+\lambda}}\in L^2(\Omega\times\Omega),\ \forall|\beta|=k\right\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^k(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]^2_{2,\lambda,\Omega}\right)^{1/2}.$$

定义内积

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\beta|\leqslant k}\int_\Omega D^\beta u\overline{D^\beta v}\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{|\beta|=k}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{(D^\beta u(x)-D^\beta u(y))\overline{(D^\beta v(x)-D^\beta v(y))}}{|x-y|^{n+2\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $1\leqslant p<\infty$. 当 $s=k$ 为非负整数时, 定义 $W_p^s(\Omega)=W_p^k(\Omega)$. 当 $s=k+\lambda$, $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$ 时, 定义空间

$$W_p^s(\Omega) = \left\{u\in W_p^k(\Omega):\ \frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^{n/p+\lambda}}\in L^p(\Omega\times\Omega),\ \forall\ |\beta|=k\right\}$$

及其范数

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{k,p,\Omega} + \sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]^p_{p,\lambda,\Omega}\right)^{1/p}.$$

**定理 3.5.1** $H^s(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. $W_p^s(\Omega)$ 是 Banach 空间, 并且是自反的.

第一个结论和第二个结论的第一部分的证明留作习题. 第二个结论的第二部分的证明参见文献 [1, 第 7 章] 或者文献 [2, 第 7 章].

### 3.5.1 稠密性和延拓

**定理 3.5.2** 假设 $s\geqslant 0$, 那么 $C^\infty(\Omega)\bigcap W_p^s(\Omega)$ 在 $W_p^s(\Omega)$ 中稠密, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

**证明** 只需考虑 $0<s<1$ 的情况.

**第一步** 证明 $C^\infty(\Omega)\bigcap W_p^s(\Omega)$ 在 $W_p^s(\Omega)$ 中稠密. 假设 $u\in W_p^s(\Omega)$, 取 $u$ 的磨光函数 $u^\varepsilon$:

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int_\Omega\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y.$$

这里的 $\eta$ 是由 1.5 节定义的软化子.

先证明, 对于任意的 $\Omega' \Subset \Omega$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|_{W_p^s(\Omega')} = 0. \tag{3.5.1}$$

再利用定理 2.2.3 的证明方法即可证得结论 (细节留作习题).

下面证明极限 (3.5.1). 我们已经知道 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|_{p,\Omega'} = 0$. 余下的是证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} [u^\varepsilon - u]^p_{p,s,\Omega'} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega'\times\Omega'} \frac{|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) - [u(x) - u(y)]|^p}{|x - y|^{n+ps}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 0. \tag{3.5.2}$$

把上式中的积分记为 $I$, 并记

$$A(x,y,z) = u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z) - [u(x) - u(y)].$$

利用磨光函数的定义以及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega'\times\Omega'} \frac{1}{|x - y|^{n+ps}} \left|\int_{|z|\leqslant 1} A(x,y,z)\eta(z)\mathrm{d}z\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_{\Omega'\times\Omega'} \frac{1}{|x - y|^{n+ps}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{|z|\leqslant 1} |A(x,y,z)|^p \eta(z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|\leqslant 1} \eta(z)\mathrm{d}z \int_{\Omega'\times\Omega'} \frac{|A(x,y,z)|^p}{|x - y|^{n+ps}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

这里用到了 $\int_{|z|\leqslant 1} \eta(z)\mathrm{d}z = 1$. 由于

$$[u(x) - u(y)]|x - y|^{-(n/p+s)} \in L^p(\Omega\times\Omega),$$

利用 $L^p(\Omega\times\Omega)$ 函数的整体连续性可得: 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时,

$$\int\limits_{\Omega'\times\Omega'} \frac{|A(x,y,z)|^p}{|x - y|^{n+ps}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\Omega'\times\Omega'} \left| \frac{u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z)}{|x - \varepsilon z - (y - \varepsilon z)|^{n/p+s}} - \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n/p+s}} \right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛于零关于 $|z| \leqslant 1$ 一致成立. 因而 (3.5.2) 成立.

第二步 证明 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 取 $u$ 的磨光函数 $u^\varepsilon$, 同于第一步可证

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[u^\varepsilon - u]_{p,s,\mathbb{R}^n}^p = 0. \tag{3.5.3}$$

采用定理 2.3.2 的证明思路. 取截断函数

$$\zeta\in C_0^\infty(B_2),\quad 0\leqslant\zeta\leqslant 1,\ \text{在 } B_1 \text{ 上 } \zeta = 1.$$

再记 $u_h^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)\zeta(\frac{x}{h})$, 那么 $u_h^\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

从定理 2.3.2 的证明可以看出: 任给 $\delta>0$, 存在 $0<\varepsilon^*\ll 1$, 对每一个 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$, 都存在 $h^*(\varepsilon)\gg 1$, 使得

$$\|u_h^\varepsilon - u\|_{p,\mathbb{R}^n}\leqslant\delta,\quad \forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*,\ h\geqslant h^*(\varepsilon). \tag{3.5.4}$$

下面固定 $\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$, 再证明

$$\lim_{h\to\infty}[u_h^\varepsilon - u^\varepsilon]_{p,s,\mathbb{R}^n}^p = \lim_{h\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|u_h^\varepsilon(x)-u_h^\varepsilon(y)-[u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)]|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 0. \tag{3.5.5}$$

把 $\mathbb{R}^{2n}$ 分解成

$$\mathbb{R}^{2n} = \{|x|<h,\ |y|<h\}\bigcup\{|x|\geqslant h\}\bigcup\{|y|\geqslant h\} = A_h\cup B_h\cup D_h.$$

因为在 $A_h$ 上, $\zeta(\frac{x}{h})=\zeta(\frac{y}{h})=1$, 所以 $u_h^\varepsilon(x)=u^\varepsilon(x)$, $u_h^\varepsilon(y)=u^\varepsilon(y)$, 故被积函数为零, 因而积分也是零. 在 $D_h$ 上的积分与在 $B_h$ 上的积分有同样的估计, 所以我们只估计在 $B_h$ 上的积分. 把被积函数的分子写成

$$\left|[u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)](\zeta(\frac{y}{h})-1)+u^\varepsilon(x)[\zeta(\frac{x}{h})-\zeta(\frac{y}{h})]\right|^p.$$

再利用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_h}\frac{|u_h^\varepsilon(x)-u_h^\varepsilon(y)-[u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)]|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\left(\int_{B_h}\frac{|u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)|^p|\zeta(\frac{y}{h})-1|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.\\
&\qquad\left.+\int_{B_h}\frac{|u^\varepsilon(x)[\zeta(\frac{x}{h})-\zeta(\frac{y}{h})]|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&\triangleq C(I_1+I_2).
\end{aligned}$$

因为当 $|y|\leqslant h$ 时, $\zeta(\frac{y}{h})=1$, 所以

$$I_1=\int_{|x|,|y|\geqslant h}\frac{|u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又因为 $u^\varepsilon\in W_p^s(\mathbb{R}^n)$, 故 $\frac{u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)}{|x-y|^{s+n/p}}\in L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, 因而当 $h\gg 1$ 时, $I_1\ll 1$.

把 $I_2$ 分解成在 $E_{1,h}=B_h\cap\{|x-y|\leqslant 1\}$ 和 $E_{2,h}=B_h\cap\{|x-y|>1\}$ 上的积分. 关于在 $E_{1,h}$ 上的积分, 对函数 $\zeta$ 利用中值定理得

$$\begin{aligned}
&\int_{E_{1,h}}\frac{|u^\varepsilon(x)|\zeta(\frac{x}{h})-\zeta(\frac{y}{h})||^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant \|D\zeta\|_\infty^p\int_{E_{1,h}}\frac{|u^\varepsilon(x)|^p}{h^p|x-y|^{n+p(s-1)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant \|D\zeta\|_\infty^p h^{-p}\int_{|x|\geqslant h}|u^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}x\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{1}{|x-y|^{n+p(s-1)}}\mathrm{d}y\\
&\ll 1,\quad 当\ h\gg 1\ 时
\end{aligned}$$

关于在 $E_{2,h}$ 上的积分, 利用 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ 得

$$\begin{aligned}
\int_{E_{2,h}}\frac{|u^\varepsilon(x)|\zeta(\frac{x}{h})-\zeta(\frac{y}{h})||^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leqslant \int_{|x|\geqslant h}|u^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}x\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}y\\
&\ll 1,\quad 当\ h\gg 1\ 时.
\end{aligned}$$

综合上面的讨论知, 极限 (3.5.5) 成立.

由式 (3.5.3) ~ (3.5.5) 知, 在 $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_h^\varepsilon\to u$. 定理得证.

对 $s>0$, 记 $H_0^s(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^s(\Omega)$ 中的闭包. 对 $s<0$, 定义 $H^s(\Omega)=(H_0^{-s}(\Omega))'$, 即 $H_0^{-s}(\Omega)$ 的对偶空间, 其范数可以写成

$$\|u\|_{H^{-s}(\Omega)}=\sup_{0\neq v\in H_0^s(\Omega)}\frac{(u,v)}{\|v\|_{H^s(\Omega)}}.$$

当 $s>0$ 时, 记 $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_p^s(\Omega)$ 中的闭包. 由定理 3.5.2 知, $\mathring{W}_p^s(\mathbb{R}^n)=W_p^s(\mathbb{R}^n)$. 对于 $s<0$ 及 $1<p<\infty$, 定义

$$W_p^s(\Omega)=\left[\mathring{W}_{p'}^{-s}(\Omega)\right]',\quad 1/p+1/p'=1.$$

利用自反性知, 对任意的 $s$ 及 $1 < p < \infty$, 有

$$[W_p^s(\mathbb{R}^n)]' \cong W_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

仿照定理 2.3.1 和定理 3.4.1, 可以证明下面的延拓定理.

**定理 3.5.3** 设 $\Omega$ 有界, $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G \ni \Omega$. 又设 $s = k + \lambda$, $k$ 是非负整数, $\lambda \in (0,1)$, $\partial\Omega \in C^{k+1}$, 那么存在一个从 $W_p^s(\Omega)$ 到 $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性延拓算子 $E$, 使得对每一个 $u \in W_p^s(\Omega)$ 有

(1) 在 $\Omega$ 上 $Eu = u$ 几乎处处成立;

(2) $\mathrm{spt}\{Eu\} \Subset G$;

(3) $\|Eu\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|Eu\|_{W_p^s(G)} \leqslant C\|u\|_{W_p^s(\Omega)}$.

**定理 3.5.4** 设 $k$ 是非负整数, $\lambda \in (0,1)$, $s = k + \lambda$. 又设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^{k+1}$, 那么 $C^{k+1}(\overline{\Omega})$ 在 $H^s(\Omega)$ 中稠密.

**证明** 先利用延拓定理 3.5.3 (取 $p = 2$) 把 $H^s(\Omega)$ 拓成 $H^s(\mathbb{R}^n)$. 对于 $u \in H^s(\Omega)$, 记 $Eu \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 是 $u$ 的延拓. 根据定理 3.2.3, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 故存在 $v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|v_j - Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$. 显然, $v_j \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, 并且

$$\|v_j - u\|_{H^s(\Omega)} = \|v_j - Eu\|_{H^s(\Omega)} \leqslant \|v_j - Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

### 3.5.2 嵌入定理和内插不等式

**定理 3.5.5** 假设 $k$ 是非负整数, $\lambda \in (0,1)$, $s = k + n/2 + \lambda$. 又设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega \in C^{[s]+1}$, 则 $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$.

**证明** 先利用延拓定理 3.5.3 (取 $p = 2$) 把 $H^s(\Omega)$ 中的函数延拓成 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 再应用定理 3.3.4 即可完成定理的证明. 细节留作习题.

**定理 3.5.6** 假定 $\Omega$ 有界, 边界 $\partial\Omega \in C^{[r]+1}$, $0 \leqslant s < r$, $0 < \theta < 1$, 则存在正常数 $C = C(n, s, r, \theta, \Omega)$, 使得

$$\|u\|_{H^{\theta s + (1-\theta) r}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\Omega)}^{\theta}\|u\|_{H^r(\Omega)}^{1-\theta}, \quad \forall u \in H^r(\Omega).$$

**证明**　先利用延拓定理 3.5.3 (取 $p=2$) 把 $H^r(\Omega)$ 延拓成 $H^r(\mathbb{R}^n)$, 再应用定理 3.3.5 即可完成定理的证明. 细节留作习题.

**定理 3.5.7**　假设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega\in C^{[s]+1}$, $0<t\leqslant s$, 那么

$$H^s(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow H^{s-t}(\Omega).$$

**证明**　设 $\{u_j\}$ 是 $H^s(\Omega)$ 中的一个有界列. 由延拓定理, 存在 $v_j\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 及有界区域 $\Omega'$, 使得 $\|v_j\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|u_j\|_{H^s(\Omega)}$, $v_j=u_j$ 几乎处处于 $\Omega$, 并且 $\mathrm{spt}\{v_j\}\subset\Omega'$ 对所有 $j$ 成立. 因为 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 是 Hilbert 空间, 所以存在 $\{v_j\}$ 的子列仍记为它自身, 以及函数 $v\in H^s(\mathbb{R}^n)$, 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中 $v_j\rightharpoonup v$. 如果能够证明在 $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$ 中 $v_j\to v$, 那么

$$\|u_j-v\|_{H^{s-t}(\Omega)}=\|v_j-v\|_{H^{s-t}(\Omega)}\leqslant\|v_j-v\|_{H^{s-t}(\mathbb{R}^n)}\to 0.$$

为了书写方便, 不妨认为 $v=0$. 现在证明: 在 $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$ 中 $v_j\longrightarrow 0$, 即

$$E_j:=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{s-t}|\hat{v}_j(y)|^2\mathrm{d}y\longrightarrow 0.$$

记 $K>0$ 是一个待定常数, 把积分分解成在 $\{|y|\geqslant K\}$ 和 $\{|y|<K\}$ 上的积分, 那么

$$E_j\leqslant(1+K^2)^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^s|\hat{v}_j(y)|^2\mathrm{d}y+(1+K^2)^{s-t}\int_{|y|<K}|\hat{v}_j(y)|^2\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C(1+K^2)^{-t}+(1+K^2)^{s-t}\int_{|y|<K}|\hat{v}_j(y)|^2\mathrm{d}y.$$

对于任给的 $\delta>0$, 固定 $K$ 适当大, 使得 $C(1+K^2)^{-t}<\delta/2$.

由于 $v_j\rightharpoonup 0$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中成立, 当然在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中也成立, 从而在 $L^2(\Omega')$ 中 $v_j\rightharpoonup 0$. 又因为 $\mathrm{spt}\{v_j\}\subset\Omega'$, 所以对任何 $y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\hat{v}_j(y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}v_j(x)e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\Omega'}v_j(x)e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}x\to 0.$$

注意到

$$|\hat{v}_j(y)|=\left|\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\Omega'}v_j(x)e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{|\Omega'|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\|v_j\|_{2,\mathbb{R}^n}$$

$$\leqslant C\|u_j\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C,$$

由控制收敛定理知, 当 $j \longrightarrow \infty$ 时

$$(1+K^2)^{s-t}\int_{|y|<K}|\hat{v}_j(y)|^2\mathrm{d}y \longrightarrow 0.$$

这就证明了 $E_j \longrightarrow 0$. 证毕.

限于篇幅, 对于空间 $W_p^s(\Omega)$ 的嵌入定理, 我们只列出结论而不给证明.

**定理 3.5.6([1, 定理 7.57])** 设 $\Omega$ 具有锥性质, $s>0$, $1<p<\infty$.

(1) 若 $n>sp$, 则当 $p\leqslant q\leqslant np/(n-sp)$ 时, $W_p^s(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(2) 若 $n=sp$, 则当 $p\leqslant q<\infty$ 时, $W_p^s(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(3) 若 $n<(s-j)p$, $j$ 是非负整数, 则 $W_p^s(\Omega)\hookrightarrow C_b^j(\Omega)$.

### 3.5.3 边界迹和迹定理

最后我们讨论空间 $W_p^s(\Omega)$ 中的边界迹和迹定理.

假设 $\Omega$ 有界, $\partial\Omega\in C^{k+1}$, $s=k+\lambda$, $k$ 是非负整数, $\lambda\in(0,1)$. 按照定义易证 (见定理 2.3.1 的证明) 存在 $\partial\Omega$ 的有限开覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 及函数 $\Phi_j:\overline{Q}_j\longrightarrow B$, 满足

$$\Phi_j(Q_j\cap\Omega)=B^+,\quad \Phi_j(Q_j\cap\partial\Omega)=P,\quad \Phi_j\in C^{k+1}(\overline{Q}_j),\quad \Phi_j^{-1}\in C^{k+1}(\overline{B}),$$

这里 $B$ 是以原点为心的单位球, $B^+=\{y\in B:\ y_n>0\}$, $P=B\cap\{y_n=0\}$. 记 $\zeta_j$ 是从属于开覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 的一个有限 $C^\infty$ 单位分解. 如果 $u\in C^{k+1}(\partial\Omega)$, 那么 $(\zeta_j u)\circ\Phi_j^{-1}(y',0)\in C_0^{k+1}(P)$. 并且把 $(\zeta_j u)\circ\Phi_j^{-1}(y',0)$ 零延拓到 $\mathbb{R}^{n-1}\setminus P$ 后得到的函数属于 $C_0^{k+1}(\mathbb{R}^{n-1})$. 定义

$$\|u\|_{W_p^s(\partial\Omega)}=\left(\sum_{j=1}^N\|(\zeta_j u)\circ\Phi_j^{-1}(y',0)\|^p_{W_p^s(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/p}. \tag{3.5.6}$$

可以证明, 对于不同的有限覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 以及相应的函数系 $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ 和对应的单位分解 $\{\zeta_j\}_{j=1}^N$, 由式 (3.5.6) 确定的范数是等价的.

**定义 3.5.1**　定义 $W_p^s(\partial\Omega)$ 是空间 $C^{k+1}(\partial\Omega)$ 关于范数 (3.5.6) 下的闭包.

利用定理 3.4.2, 采用定理 2.10.1 的证明方法, 我们可以证明下面的迹定理.

**定理 3.5.9**　假定 $\Omega$ 有界, $m$ 是正整数, $k$ 是非负整数, $k+1/2<s\leqslant m$, $\partial\Omega\in C^m$. 记 $\gamma_j$ 是 $C^m(\bar{\Omega})$ 到 $C^{m-j}(\partial\Omega)$ 的迹算子: $\gamma_j u=\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\Big|_{\partial\Omega}$, 其中 $\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}$ 是沿着 $\partial\Omega$ 的 $j$ 次外法向导数, 那么 $\gamma_j$ 可以被唯一地延拓成 $H^s(\Omega)$ 到 $H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$ 的线性连续算子, $j=0,1,\cdots,k$.

利用定理 3.4.3, 并采用定理 2.10.1 的证明方法, 可以证明下面的定理.

**定理 3.5.10**　设 $\Omega, k, m$ 和 $s$ 同上, 记

$$H^{(s-\frac{1}{2})}(\partial\Omega)=H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\times\cdots\times H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

那么存在一个线性连续算子

$$P_\Omega: H^{(s-\frac{1}{2})}(\partial\Omega)\longrightarrow H^s(\Omega),$$

具有如下性质: 若 $\phi=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_k)\in H^{(s-\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$, $u=P_\Omega\phi\in H^s(\Omega)$, 则 $\phi_j=\gamma_j u, j=0,1,\cdots,k$, 并且还有

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C\|\phi\|_{H^{(s-\frac{1}{2})}(\partial\Omega)}=C\sum_{j=0}^{k}\|\phi_j\|_{H^{s-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

上面的两个定理说明, 迹算子 $\gamma=(\gamma_0,\cdots,\gamma_k)$ 是 $H^s(\Omega)/\mathrm{Ker}\gamma$ 与 $H^{(s-\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ 之间的一个一一连续线性算子, 并且 $\gamma^{-1}=P_\Omega$.

上面的结果可以推广到空间 $W_p^k(\Omega)$.

**定理 3.5.11**　([1, 定理 7.53])　假设 $k$ 是正整数, $1<p<\infty$, $\Omega$ 有界, $\partial\Omega\in C^k$, 迹算子 $\gamma$ 同于定理 2.4.3. 那么 $\gamma$ 可以被连续地延拓成一个从 $W_p^k(\Omega)/\mathrm{Ker}\gamma$ 到

$$W_p^{(k-1/p)}(\partial\Omega)=\prod_{j=0}^{k-1}W_p^{k-j-1/p}(\partial\Omega)$$

上的同构和同胚.

该定理在下属意义下包含了对 $W_p^k(\Omega)$ 的"正"和"反"两方面的嵌入定理. 若 $u\in W_p^k(\Omega)$, 则迹 $\gamma u\in W_p^{(k-1/p)}(\partial\Omega)$ 并且

$$\|\gamma u\|_{W_p^{(k-1/p)}(\partial\Omega)}\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega};$$

反之, 若 $v\in W_p^{(k-1/p)}(\partial\Omega)$, 则存在 $u\in W_p^k(\Omega)$, 满足 $v=\gamma u$ 并且

$$\|u\|_{k,p,\Omega}\leqslant C\|v\|_{W_p^{(k-1/p)}(\partial\Omega)}.$$

## 习题

**3.1** 证明定理 3.1.2 的 (3).

**3.2** 利用 Fourier 变换证明: 若 $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>n/2$, 那么 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并且还有

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\leqslant C(n,s)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

**3.3** 给出引理 3.3.1 的充分性的详细证明, 并证明关系式 (3.3.2).

**3.4** 对于定理 3.4.3 的证明过程中定义的算子 $P$, 试证明 $P$ 是线性连续算子并且还有 $\gamma_j(P\phi)=\phi_j$, $j=0,1,\cdots,k$.

**3.5** 设 $\Omega=(0,1)$, 函数 $u(x)=x^{1/2}$. 试证明对于任何 $1<p<2$, 有

$$u\in W_p^s(\Omega),\quad 其中\ s=1-1/p.$$

**3.6** 证明定理 3.5.1 的第一个结论和第二个结论的第一部分.

**3.7** 补充完成定理 3.5.2 第一步的证明.

**3.8** 假设 $u\in W_p^s(\mathbb{R}^n)$, 用 $u^\epsilon$ 表示 $u$ 的磨光函数. 试证明 $u^\epsilon\in W_p^s(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\|u^\epsilon\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)},\quad\forall\,0<\epsilon\leqslant 1.$$

**3.9** 证明定理 3.5.3.

**3.10** 给出定理 3.5.5 和定理 3.5.6 的详细证明.

**3.11** 证明定理 3.5.9 和定理 3.5.10.

# 第四章　Morrey 空间, Campanato 空间和 BMO 空间

Sobolev 嵌入定理, 会或多或少地造成指数的损失. 例如, 利用 Sobolev 嵌入定理, 当 $n < p$ 时 $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, 而当 $n \geqslant p$ 时就不知道 $W_p^1(\Omega)$ 中的函数是否 Holder 连续. 为了克服这种缺陷, 得到较为精确的结果, 人们从各种角度推广和改进 Sobolev 空间. 这里只介绍 Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间这三种推广形式.

## 4.1　各向同性的 Morrey 空间和 Campanato 空间

对于一个以 $\alpha \in (0,1)$ 为指数的 Holder 连续函数 $u$, 按定义

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}, \quad \forall\, x, y \in \Omega.$$

但是对许多情形, 直接从微分方程得出解的这种逐点估计是比较困难的. 然而对方程进行积分估计总是相对容易一些. 那么, 是否有一种基于积分的描述方法, 来代替上面的逐点估计呢?

我们回顾一下实指数 Sobolev 空间. 当 $0<s<1$ 时, 空间 $W_p^s(\Omega)$ 上的范数是借助于

$$[u]_{p,s,\Omega}=\left(\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

来刻画的. 这实际上是用积分方法定义了函数 $u$ 的分数阶 ($s$ 阶) 弱导数的 $L^p$ 可积性. 与此相同, Morrey 和 Campanato 分别引入了 Morrey 空间和 Campanato 空间, 用于刻画 Hölder 连续函数的积分特征. 事实上, 在 2.6 节的最后一部分我们已经看到了 Morrey 空间对于 Hölder 连续函数的积分特征的刻画.

设 $\Omega$ 是一个有界区域. 用 $d=\mathrm{diam}(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 的直径. 对于 $x\in\Omega$ 和 $0<\rho<d$, 记 $\Omega_\rho^x=\Omega\cap B_\rho(x)$. 对于函数 $u\in L^p(\Omega)$, 本章总默认在 $\Omega$ 的外部 $u\equiv 0$.

**定义 4.1.1** 对于 $p\geqslant 1, \theta\geqslant 0$, 定义

$$L^{p,\theta}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega):\sup_{\substack{x\in\Omega\\0<\rho<d}}\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u|^p\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{L^{p,\theta}(\Omega)}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\0<\rho<d}}\left(\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

称 $L^{p,\theta}(\Omega)$ 为Morrey 空间. 容易证明 $L^{p,\theta}(\Omega)$ 是 Banach 空间.

这里重复一遍: 对于 $u\in L^1(\Omega)$, 记 $u_\Omega=⨍_\Omega u(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$, 表示 $u$ 在 $\Omega$ 上的平均.

**引理 4.1.1** 用符号 $\cong$ 表示同构加范数等价. 那么空间 $L^{p,\theta}(\Omega)$ 有以下性质:

(1) $L^{p,0}(\Omega)\cong L^p(\Omega)$;

(2) $L^{p,1}(\Omega)\cong L^\infty(\Omega)$;

(3) 如果 $\theta>1$, 则 $L^{p,\theta}(\Omega)\cong\{0\}$;

(4) 如果 $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, $\theta,\sigma\geqslant 0$ 且满足 $(1-\theta)/p\geqslant(1-\sigma)/q$, 则

$$L^{q,\sigma}(\Omega)\hookrightarrow L^{p,\theta}(\Omega).$$

**证明**　性质 (1) 是显然的.

现证性质 (2). 如果 $u\in L^{\infty}(\Omega)$, 容易看出 $\|u\|_{L^{p,1}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{\infty,\Omega}$. 反过来, 假设 $u\in L^{p,1}(\Omega)$. 应用 Lebesgue 微分定理 (定理 A.1) 知,

$$|u(x)|^p=\lim_{\rho\to 0}\fint_{\Omega_\rho^x}|u(y)|^p\mathrm{d}y,\quad \text{a.e. } x\in\Omega. \tag{4.1.1}$$

因此 $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L^{p,1}(\Omega)}$.

再证性质 (3). 设 $\theta>1$, $u\in L^{p,\theta}(\Omega)$. 对于任意的 $\rho>0$, 当 $x\in\Omega$ 时, 按照范数的定义有

$$\fint_{\Omega_\rho^x}|u|^p\mathrm{d}y\leqslant|\Omega_\rho^x|^{\theta-1}\|u\|^p_{L^{p,\theta}(\Omega)}.$$

令 $\rho\longrightarrow 0$, 并注意到 (4.1.1) 式得 $|u(x)|^p\leqslant 0$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立.

应用 Hölder 不等式可以推出性质 (4). 证毕.

**定义 4.1.2**　*对于 $x\in\Omega$ 及 $0<\rho<d$, 定义*

$$u_\rho^x=\fint_{\Omega_\rho^x}u(y)\mathrm{d}y.$$

*对于 $p\geqslant 1$ 和 $\theta\geqslant 0$, 定义*

$$\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega):\sup_{\substack{x\in\Omega\\0<\rho<d}}\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^{\theta}}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y)-u_\rho^x|^p\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

*并赋予范数*

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}&=\|u\|_{p,\Omega}+\sup_{\substack{x\in\Omega\\0<\rho<d}}\left(\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^{\theta}}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y)-u_\rho^x|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\&:=\|u\|_{p,\Omega}+[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},\end{aligned}$$

*称 $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$ 为 Campanato 空间.*

容易证明 $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$ 是 Banach 空间，并且具有下面的性质

**引理 4.1.2** *如果* $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $\theta, \sigma \geqslant 0$ *且满足* $(1-\theta)/p \geqslant (1-\sigma)/q$, *那么*

$$\mathcal{L}^{q,\sigma}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$$

**定义 4.1.3** *称有界区域* $\Omega$ *为*(A) *型区域，是指存在正常数* $A$, *使得对于任意的* $x \in \overline{\Omega}$ *以及* $0 < \rho \leqslant d$, *都有* $|\Omega_\rho^x| \geqslant A\rho^n$.

**定理 4.1.1** *假定* $\Omega$ *是* (A) *型区域*, $p \geqslant 1$.

(1) *对于* $0 \leqslant \theta < 1$, *有* $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega) \cong L^{p,\theta}(\Omega)$;

(2) *对于* $1 < \theta \leqslant 1 + p/n$, *有* $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega) \cong C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, *其中* $\alpha = n(\theta - 1)/p$.

为证定理 4.1.1, 我们先证明二个引理

**引理 4.1.3** *设* $\Omega$ *是* (A) *型区域．则存在仅依赖于* $n, \theta, A$ *和* $p$ *的正常数* $C$, *使得对于任意的* $x \in \Omega$, $0 < \sigma < \rho$ *以及* $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$, *成立*

$$|u_\rho^x - u_\sigma^x| \leqslant C\rho^{n\theta/p}\sigma^{-n/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

**证明** 因为对于任意的 $y \in \Omega_\sigma^x$, 有

$$|u_\rho^x - u_\sigma^x|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|u_\rho^x - u(y)|^p + |u_\sigma^x - u(y)|^p\right),$$

两边关于 $y$ 在 $\Omega_\sigma^x$ 上取积分平均值，再利用 (A) 型区域的性质得

$$\begin{aligned}
|u_\rho^x - u_\sigma^x|^p &\leqslant \frac{2^{p-1}}{|\Omega_\sigma^x|}\left(\int_{\Omega_\sigma^x}|u_\rho^x - u|^p\mathrm{d}y + \int_{\Omega_\sigma^x}|u_\sigma^x - u|^p\mathrm{d}y\right)\\
&\leqslant \frac{2^{p-1}|\Omega_\rho^x|^\theta}{|\Omega_\sigma^x|}\left(\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u_\rho^x - u|^p\mathrm{d}y + \frac{1}{|\Omega_\sigma^x|^\theta}\int_{\Omega_\sigma^x}|u_\sigma^x - u|^p\mathrm{d}y\right)\\
&\leqslant 2^p\frac{|\Omega_\rho^x|^\theta}{|\Omega_\sigma^x|}[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}\\
&\leqslant \frac{2^p\omega_n^\theta\rho^{n\theta}}{A\sigma^n}[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}
\end{aligned}$$

**引理 4.1.4** 在引理 4.1.3 的条件下，如果 $\theta \neq 1$，则对于任意的正整数 $h$，有

$$|u^x_\rho - u^x_{2^{-h}\rho}| \leqslant C\rho^\alpha |1 - 2^{-\alpha h}| [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},$$

其中 $\alpha = n(\theta - 1)/p$，正常数 $C$ 只依赖于 $n, \theta, A$ 和 $p$.

**证明** 注意到此时 $\alpha \neq 0$，由引理 4.1.3 知

$$\begin{aligned}
|u^x_{2^{-j+1}\rho} - u^x_{2^{-j}\rho}| &\leqslant C(2^{-j+1}\rho)^{n\theta/p}(2^{-j}\rho)^{-n/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\
&= C2^{n\theta/p}\rho^\alpha 2^{-j\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}, \\
|u^x_\rho - u^x_{2^{-h}\rho}| &\leqslant \sum_{j=1}^{h} |u^x_{2^{-j+1}\rho} - u^x_{2^{-j}\rho}| \\
&\leqslant C\rho^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \sum_{j=1}^{h} 2^{-j\alpha} \\
&= C\rho^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \frac{1 - 2^{-h\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} \\
&\leqslant C\rho^\alpha |1 - 2^{-\alpha h}| \times [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

**引理 4.1.5** 在引理 4.1.3 的条件下，当 $\theta < 1$ 时，有

$$|u^x_\rho| \leqslant |\Omega|^{-1/p}\|u\|_{p,\Omega} + C\rho^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},$$

这里的 $\alpha$ 同上，正常数 $C$ 只依赖于 $n, \theta, A$ 和 $p$.

**证明** 因为 $0 < \rho \leqslant d$，故存在非负整数 $h$ 使得

$$d/2^{h+1} \leqslant \rho \leqslant d/2^h. \tag{4.1.2}$$

又因为 $\Omega \subset B_d(x)$，所以 $\Omega^x_d = \Omega$，$u^x_d = u_\Omega$. 显然

$$|u^x_\rho| \leqslant |u^x_\rho - u^x_{2^{-h}d}| + |u^x_{2^{-h}d} - u^x_d| + |u_\Omega|. \tag{4.1.3}$$

应用引理 4.1.3 及不等式 (4.1.2) 得

$$\begin{aligned}
|u^x_\rho - u^x_{2^{-h}d}| &\leqslant C(2^{-h}d)^{n\theta/p}\rho^{-n/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\
&= C2^{n\theta/p}(2^{-h-1}d)^{n\theta/p}\rho^{-n/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\
&\leqslant C\rho^\alpha [u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

注意到 $\alpha - n(\theta - 1)/p < 0$, 应用引理 4.1.4 以及式 (4.1.2) 右端的不等式又得

$$\begin{aligned}|u_d^x - u_{2^{-h}d}^x| &\leqslant Cd^\alpha|1 - 2^{-\alpha h}|[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\ &\leqslant Cd^\alpha 2^{-\alpha h}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\ &= C(2^{-h}d)^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \\ &\leqslant C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

把式 (4.1.4) 和 (4.1.5) 代入式 (4.1.3), 再利用

$$|u_\Omega| \leqslant \fint_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\fint_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = |\Omega|^{-1/p}\|u\|_{p,\Omega}$$

即得结论.

**定理 4.1.1 的证明** 先证 (i). 设 $0 \leqslant \theta < 1$. 如果 $u \in L^{p,\theta}(\Omega)$, 由于

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y) - u_\rho^x|^p \mathrm{d}y &= \int_{\Omega_\rho^x}\left|\fint_{\Omega_\rho^x}[u(y) - u(z)]\mathrm{d}z\right|^p \mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{2^{p-1}|\Omega_\rho^x|^\theta}{|\Omega_\rho^x|}\int_{\Omega_\rho^x}\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}(|u(y)|^p + |u(z)|^p)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &\leqslant 2^p|\Omega_\rho^x|^\theta\|u\|^p_{L^{p,\theta}(\Omega)},\end{aligned}$$

我们有

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \leqslant 2\|u\|_{L^{p,\theta}(\Omega)}.$$

故 $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$. 因为 $\Omega$ 有界, 可取 $x \in \Omega$ 和 $0 < \rho < d$, 使 $\Omega \subset B_\rho(x)$. 于是 $\Omega = \Omega_\rho^x$, 并且

$$\int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}y = |\Omega_\rho^x|^\theta\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y)|^p \mathrm{d}y \leqslant |\Omega|^\theta\|u\|^p_{L^{p,\theta}(\Omega)}.$$

从而

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L^{p,\theta}(\Omega)}.$$

反过来, 若 $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$, 则对于任意的 $x \in \Omega$ 和 $0 < \rho \leqslant d$, 我们有

$$\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y)|^p\mathrm{d}y \leqslant 2^{p-1}\left(\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u(y)-u_\rho^x|^p\mathrm{d}y+\frac{|\Omega_\rho^x|}{|\Omega_\rho^x|^\theta}|u_\rho^x|^p\right). \tag{4.1.6}$$

应用引理 4.1.5 知

$$|u_\rho^x| \leqslant C\|u\|_{p,\Omega}+C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},\quad \alpha=n(\theta-1)/p.$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{|\Omega_\rho^x|}{|\Omega_\rho^x|^\theta}|u_\rho^x|^p &\leqslant C\rho^{n(1-\theta)}\|u\|_{p,\Omega}^p+C\rho^{n(1-\theta)}\rho^{p\alpha}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}^p\\ &\leqslant Cd^{n(1-\theta)}\|u\|_{p,\Omega}^p+C[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}^p\\ &\leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}^p.\end{aligned}$$

再利用式 (4.1.6) 得

$$\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x}|u(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}^p,\quad \forall x\in\Omega,\ 0<\rho\leqslant d.$$

于是 $u \in L^{p,\theta}(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_{L^{p,\theta}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

现在证明结论 (2). 由 $\theta > 1$ 知, $\alpha > 0$. 先设 $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$, 欲证 $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ 并且 $|u|_\alpha \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}$. 方法是用 $u$ 的积分平均逼近 $u$, 其思想源于积分平均具有某种"磨光"作用, 性质要比原有的函数好.

对于任意的整数 $k > h \geqslant 0$, 由引理 4.1.4 及 $\alpha > 0$ 知 (因为 $\theta > 1$),

$$|u_{2^{-h}\rho}^x-u_{2^{-k}\rho}^x| \leqslant C(2^{-h}\rho)^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}. \tag{4.1.7}$$

这说明数列 $\{u_{2^{-h}\rho}^x\}_{h\geqslant 0}$ 是 Cauchy 列. 故存在一个数, 记为 $\tilde{u}_\rho(x)$, 使得当 $h \longrightarrow \infty$ 时,

$$u_{2^{-h}\rho}^x \longrightarrow \tilde{u}_\rho(x).$$

对于 $\sigma<\rho$, 由引理 4.1.3 知, 当 $h\to+\infty$ 时,

$$|u^x_{2^{-h}\rho}-u^x_{2^{-h}\sigma}|\leqslant C2^{-\alpha h}\rho^{n\theta/p}\sigma^{-n/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}\longrightarrow 0,$$

从而 $\tilde{u}_\rho(x)=\tilde{u}_\sigma(x)$, 即数列 $\{u^x_{2^{-h}\rho}\}$ 的极限与 $\rho$ 无关, 记为 $\tilde{u}(x)$. 由 Lebesgue 微分基本定理 (定理 A.1) 知, 对于几乎所有的 $x\in\Omega$, $u^x_{2^{-h}\rho}\to u(x)$. 因而 $\tilde{u}(x)=u(x)$ 几乎处处于 $x\in\Omega$. 利用式 (4.1.7) 又知, 对于任意的 $0<\rho\leqslant d$,

$$|u^x_\rho-u(x)|\leqslant C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}. \tag{4.1.8}$$

下面证明 $u(x)$ 是具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数. 对于 $x,y\in\Omega$, 不妨认为 $|x-y|<d/2$. 取 $\rho=2|x-y|$, 利用不等式 (4.1.8) 得

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)|&\leqslant|u(x)-u^x_\rho|+|u(y)-u^y_\rho|+|u^x_\rho-u^y_\rho|\\&\leqslant C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}+|u^x_\rho-u^y_\rho|.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

因为

$$|u^x_\rho-u^y_\rho|\leqslant|u^x_\rho-u(z)|+|u^y_\rho-u(z)|,$$

两边关于 $z$ 在 $\Omega^x_\rho\cap\Omega^y_\sigma$ 上积分, 有

$$|u^x_\rho-u^y_\rho|\times|\Omega^x_\rho\cap\Omega^y_\sigma|\leqslant\int_{\Omega^x_\rho}|u^x_\rho-u(z)|\mathrm{d}z+\int_{\Omega^y_\sigma}|u^y_\rho-u(z)|\mathrm{d}z.$$

利用 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^x_\rho}|u^x_\rho-u(z)|\mathrm{d}z&\leqslant|\Omega^x_\rho|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\Omega^x_\rho}|u^x_\rho-u(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\\&\leqslant|\Omega^x_\rho|^{\frac{p-1+\theta}{p}}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},\\\int_{\Omega^y_\sigma}|u^y_\rho-u(z)|\mathrm{d}z&\leqslant|\Omega^y_\sigma|^{\frac{p-1+\theta}{p}}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.\end{aligned}$$

因而

$$|u^x_\rho-u^y_\rho|\times|\Omega^x_\rho\cap\Omega^y_\sigma|\leqslant C\rho^{n(p-1+\theta)/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

因为 $\Omega$ 是 (A) 型区域, 由 $\rho = 2|x-y|$ 知, $|\Omega_\rho^x \cap \Omega_\rho^y| \geqslant c\rho^n$. 于是

$$|u_\rho^x - u_\rho^y| \leqslant C\rho^{n(\theta-1)/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} = C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

将其代入式 (4.1.9) 得

$$|u(x)-u(y)| \leqslant C\rho^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} = C|x-y|^\alpha[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}, \tag{4.1.10}$$

即 $[u]_\alpha \leqslant C[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}$. 又因为

$$\sup_\Omega |u| \leqslant |u_\Omega| + \sup_\Omega |u-u_\Omega| \leqslant C\|u\|_{L^p} + [u]_\alpha d^\alpha \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)},$$

所以

$$|u|_\alpha = \sup_\Omega |u| + [u]_\alpha \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

反之, 若 $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, 欲证 $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$ 并且 $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \leqslant C|u|_\alpha$. 事实上, 由于 $\Omega$ 是 (A) 型区域, 故对任意的 $0<\rho<d$, 当 $y \in \Omega_\rho^x$ 时, 有

$$|u(y)-u_{\rho}^x|^p \leqslant \fint_{\Omega_\rho^x} |u(y)-u(z)|^p \mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{A\rho^n}\int_{\Omega_\rho^x} |y-z|^{\alpha p}\mathrm{d}z[u]_\alpha^p.$$

因为 $y, z \in \Omega_\rho^x$, 所以 $|y-z| \leqslant |x-y|+|x-z| \leqslant 2\rho$. 于是

$$|u(y)-u_\rho^x|^p \leqslant C\rho^{\alpha p}[u]_\alpha^p,$$

$$\frac{1}{|\Omega_\rho^x|^\theta}\int_{\Omega_\rho^x} |u(y)-u_\rho^x|^p \mathrm{d}y \leqslant \frac{C}{A^\theta}\rho^{\alpha p}\rho^{n-n\theta}[u]_\alpha^p \leqslant C[u]_\alpha^p.$$

又因为 $\|u\|_{p,\Omega} \leqslant |\Omega|^{1/p}\sup|u|$, 故有 $u \in \mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$, 并且 $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)} \leqslant C|u|_\alpha$. 证毕.

**定理 4.1.2** 如果 $\theta > 1+p/n$, 那么空间 $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)$ 中的函数都是常数.

**证明** 由式 (4.1.10) 知, 对于 $x, y \in \Omega$, 成立

$$|u(x)-u(y)| \leqslant C|x-y|^{n(\theta-1)/p}[u]_{\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega)}.$$

因为 $\theta > 1+p/n$, 所以 $n(\theta-1)/p > 1$. 上面的不等式说明 $u$ 可微且微商恒为零, 因此 $u$ 是常数. 证毕.

**命题 4.1.1** 假定 $u\in\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega)$, $\Omega$ 是 (A) 型区域.

(1) 如果 $0\leqslant\theta<1, b\in L^{\infty}(\Omega)$, 则 $bu\in\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega)$;

(2) 如果 $1\leqslant\theta\leqslant 1+2\alpha/n, b\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 则 $bu\in\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega)$, 这里 $0<\alpha\leqslant 1$.

该命题的证明同于后面 4.3 节的命题 4.3.1.

## 4.2 空间 BMO 与 $\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)$

根据引理 4.1.1、定理 4.1.1 以及定理 4.1.2, 我们已经清楚地了解了 Morrey 空间的结构, 以及 $\theta\neq 1$ 时 Campanato 空间的结构. 我们自然想知道 $\theta=1$ 时 Campanato 空间的结构. 根据定义容易看出, $L^{\infty}(\Omega)\subset\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)$. 然而有例子说明反过来是不对的, 即存在函数 $u\in\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)$, 但是 $u\notin L^{\infty}(\Omega)$. 本节将证明: 当 $\Omega$ 是立方体 (正立方体) 时, $\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)$ 就是 BMO($\Omega$) 空间, 即有界平均振幅函数空间. 同上, 用 $u_{\Omega}$ 表示函数 $u$ 在集合 $\Omega$ 上的平均.

**定义 4.2.1** *有界平均振幅函数空间 BMO($\Omega$) 是 $L^1(\Omega)$ 中所有满足*

$$[u]_{*,\Omega}:=\sup_{\Omega'\subset\Omega}\fint_{\Omega'}|u(x)-u_{\Omega'}|\mathrm{d}x<\infty$$

*的函数构成的线性空间. 对于 $u\in$ BMO($\Omega$), 数*

$$[u]_{*,\Omega}:=\sup_{\Omega'\subset\Omega}\fint_{\Omega'}|u(x)-u_{\Omega'}|\mathrm{d}x$$

*被称为 $u$ 的半范数.*

容易证明

$$\|u\|_{*,\Omega}=\|u\|_{L^1(\Omega)}+[u]_{*,\Omega}$$

是 BMO($\Omega$) 中的范数. BMO($\Omega$) 在该范数下是 Banach 空间. BMO($\Omega$) 通常又被称为 John-Nirenberg 空间. 注意到下面的简单事实: 对于任

意常数 $c$, 成立

$$\int_{\Omega'}|u-u_{\Omega'}|^p\mathrm{d}x\leqslant 2^p\int_{\Omega'}|u-c|^p\mathrm{d}x,$$

由定义可看出

$$\mathcal{L}^{1,1}(\Omega)\cong \mathrm{BMO}(\Omega). \tag{4.2.1}$$

**定义 4.2.2**　对于 $u\in L^p(\Omega)$, 记集合

$$A_u(s)=\{x\in\Omega:|u(x)|>s\}.$$

称函数 $\lambda_u(s)=|A_u(s)|$ 为 $u$ 的分布函数

由于 $u\in L^p(\Omega)$, 所以当 $s\to\infty$ 时 $\lambda_u(s)\to 0$.

**引理 4.2.1**　对于 $u\in L^p(\Omega)$, 成立

$$\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_u(s)\mathrm{d}s$$

**证明**　直接利用 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x&=\int_\Omega\mathrm{d}x\int_0^{|u(x)|}ps^{p-1}\mathrm{d}s\\&=\int_\Omega\mathrm{d}x\int_0^\infty ps^{p-1}\chi_{A_u(s)}\mathrm{d}s\\&=\int_0^\infty\mathrm{d}s\int_\Omega ps^{p-1}\chi_{A_u(s)}\mathrm{d}x\\&=p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_u(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

**引理 4.2.2 (Calderon-Zygmund 分解)**　设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f\geqslant 0$, 则对于任意固定的常数 $\alpha>0$ 总存在两个集合 $F$ 与 $G$ 使得

(1) $\mathbb{R}^n=F\cup G$, $F\cap G=\emptyset$;

(2) $G=\bigcup_j\Omega_j$, $\{\Omega_j\}$ 是互不交叠且边平行于坐标轴的立方体, 满足如下估计

$$\alpha<⨍_{\Omega_j}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2^n\alpha,\quad j=1,2,\cdots, \tag{4.2.2}$$

(3) $f(x) \leqslant \alpha$ 在 $F$ 上几乎处处成立;

(4) $|G| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

**证明** 因为 $\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x < \infty$, 我们可以把 $\mathbb{R}^n$ 剖分成边长很大的等立方体网 $\{\Omega^*\}$, 使得

$$\fint_{\Omega^*} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \alpha, \quad \forall\, \Omega^* \in \{\Omega^*\}.$$

将每一个 $\Omega^*$ 等分成 $2^n$ 个小立方体 $\Omega'$, 此时可能出现两种情况

$$(1)\ \fint_{\Omega'} f(x)\mathrm{d}x > \alpha, \qquad (2)\ \fint_{\Omega'} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \alpha$$

我们把属于第一种情况的 $\Omega'$ 归入 $\{\Omega_j\}$. 对于这样的立方体 $\Omega'$ 而言, 因为

$$\alpha < \fint_{\Omega'} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2^{-n}}\fint_{\Omega^*} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2^n\alpha,$$

所以式 (4.2.2) 成立.

把属于第二种情况的 $\Omega'$ 继续等分, 对于等分后的小立方体而言, 又有上述两种情况出现. 仍然把属于第一种情况的小立方体归入 $\{\Omega_j\}$, 把属于第二种情况的小立方体继续等分. …… 直这样做下去. 取 $G$ 是这些 $\Omega_j$ 的并集, $F = \mathbb{R}^n \setminus G$. 这样, 结论 (1) 和 (2) 显然成立.

现在证明结论 (3). 对于任意的 $x \in F$, 存在属于第二种情况的 $\{\Omega^l\}$, 使得 $x \in \Omega^l$ 且当 $l \to \infty$ 时 $|\Omega^l| \to 0$. 利用 Lebesgue 微分定理 (定理 A.1) 得

$$\alpha \geqslant \fint_{\Omega^l} f(y)\mathrm{d}y \longrightarrow f(x), \quad \text{a. e. } x \in F.$$

故

$$f(x) \leqslant \alpha, \quad \text{a. e. } x \in F.$$

这说明结论 (3) 成立.

再证明结论 (4). 由结论 (2) 知 $\alpha < \fint_{\Omega_j} f(x)\mathrm{d}x$, 即 $\alpha|\Omega_j| \leqslant \int_{\Omega_j} f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$|G| = \sum_j |\Omega_j| \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_j \int_{\Omega_j} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{\bigcup\Omega_j} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$$

**注 4.2.1** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体. 如果把 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 换成 $f \in L^1(\Omega)$, 那么对于任意满足

$$\alpha \geqslant \fint_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$$

的正常数 $\alpha$, 引理 4.2.2 的结论仍然成立. 此时 $F = \Omega \setminus G$.

从现在开始, 本节总假定 $\Omega, \Omega'$ 等都是 $\mathbb{R}^n$ 中的边平行于坐标轴的立方体.

**定理 4.2.1 (John-Nirenberg 定理)** 设 $u \in \mathrm{BMO}(\Omega)$, 则存在仅依赖于 $n$ 的正常数 $C_1$ 和 $C_2$, 使得对于任意的 $\Omega' \subset \Omega$, 都有

$$|\{x \in \Omega' : |u(x) - u_{\Omega'}| > s\}| \leqslant C_1|\Omega'| \exp\left(-\frac{C_2}{[u]_{*,\Omega}} s\right).$$

**证明** 因为对于任意的 $\Omega' \subset \Omega$, $u \in \mathrm{BMO}(\Omega)$ 隐含 $u \in \mathrm{BMO}(\Omega')$, 不妨认为 $\Omega' = \Omega$. 若以 $v = u/[u]_{*,\Omega}$ 代替 $u$, 又不妨认为 $[u]_{*,\Omega} = 1$.

对于

$$\alpha > 1 = [u]_{*,\Omega} \geqslant \fint_{\Omega} |u(x) - u_{\Omega}|\mathrm{d}x,$$

应用 Calderon-Zygmund 分解于函数 $|u(x) - u_{\Omega}|$ 知, 存在互不交叠的立方体 $\Omega_{j,1} \subset \Omega$, 使得

$$\begin{cases} \alpha < \fint_{\Omega_{j,1}} |u(x) - u_{\Omega}|\mathrm{d}x \leqslant 2^n\alpha, \\ |u(x) - u_{\Omega}| \leqslant \alpha, \quad \text{a.e. } x \in \Omega \setminus \bigcup\limits_j \Omega_{j,1}. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

由此推出

$$\sum_j |\Omega_{j,1}| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\Omega} |u(x) - u_{\Omega}|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha}[u]_{*,\Omega}|\Omega| = \frac{1}{\alpha}|\Omega|, \tag{4.2.4}$$

$$|u_{\Omega_{j,1}} - u_{\Omega}| = \left|\fint_{\Omega_{j,1}} (u(x) - u_{\Omega})\mathrm{d}x\right| \leqslant \fint_{\Omega_{j,1}} |u(x) - u_{\Omega}|\mathrm{d}x \leqslant 2^n\alpha. \tag{4.2.5}$$

显然, 对每一个 $\Omega_{j,1}$,

$$\fint_{\Omega_{j,1}} |u(x) - u_{\Omega_{j,1}}|\mathrm{d}x \leqslant [u]_{*,\Omega} = 1. \tag{4.2.6}$$

对函数 $f(x)=u(x)-u_{\Omega_{j,1}}$ 在 $\Omega_{j,1}$ 上利用分解定理, 又可得到互不交叠的立方体 $\{\Omega_{m,2}\}$ (它是对所有的 $\Omega_{j,1}$ 用分解定理得到的), 满足

$$
\begin{aligned}
&\alpha < \fint_{\Omega_{m,2}} |u(x)-u_{\Omega_{j,1}}|\mathrm{d}x \leqslant 2^n\alpha, \quad \forall\, \Omega_{m,2}\subset\Omega_{j,1},\\
&|u(x)-u_{\Omega_{j,1}}|\leqslant\alpha, \quad \text{a. e. } x\in\Omega_{j,1}\setminus\bigcup_m\Omega_{m,2}.
\end{aligned} \tag{4.2.7}
$$

利用不等式 (4.2.4) 和 (4.2.6) 又知

$$
\begin{aligned}
\sum_m|\Omega_{m,2}| &\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_m\int_{\Omega_{m,2}}|u(x)-u_{\Omega_{j,1}}|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_j\int_{\Omega_{j,1}}|u(x)-u_{\Omega_{j,1}}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_j|\Omega_{j,1}| = \frac{1}{\alpha^2}|\Omega|.
\end{aligned}
$$

我们将证明

$$
|u(x)-u_\Omega|\leqslant 2^n\cdot 2\alpha, \quad \text{a. e. } x\in\Omega\setminus\bigcup_m\Omega_{m,2}. \tag{4.2.8}
$$

若 $x\in\Omega\setminus\bigcup_j\Omega_{j,1}$, 那么式 (4.2.3) 的第二式蕴含式 (4.2.8). 若 $x\in\bigcup_j\Omega_{j,1}\setminus\bigcup_m\Omega_{m,2}$, 那么 $x$ 必属于某个 $\Omega_{j,1}$, 记为 $\Omega_{j_0,1}$. 由不等式 (4.2.5) 和 (4.2.7) 知,

$$
|u(x)-u_\Omega|\leqslant|u_{\Omega_{j_0,1}}-u_\Omega|+|u(x)-u_{\Omega_{j_0,1}}|\leqslant 2^n\alpha+\alpha\leqslant(2^n+1)\alpha,
$$

故式 (4.2.8) 成立.

重复上面的步骤归纳可得: 对任意 $k\geqslant 1$ 存在互不交叠的立方体 $\{\Omega_{m,k}\}$, 满足

$$
\sum_m|\Omega_{m,k}|\leqslant\frac{1}{\alpha^k}|\Omega|, \quad |u(x)-u_\Omega|\leqslant 2^nk\alpha, \quad \text{a.e. } x\in\Omega\setminus\bigcup_m\Omega_{m,k}.
$$

于是

$$
|\{x\in\Omega: |u(x)-u_\Omega|>2^nk\alpha\}|\leqslant\sum_m|\Omega_{m,k}|\leqslant\frac{1}{\alpha^k}|\Omega|.
$$

该估计式对于 $k=0$ 显然成立. 对任意的 $s\in(0,\infty)$, 必存在整数 $k\geqslant 0$, 使 $2^n k\alpha\leqslant s\leqslant 2^n(k+1)\alpha$, 因此

$$\begin{aligned}\left|\left\{x\in\Omega : |u(x)-u_\Omega|>s\right\}\right| &\leqslant \left|\left\{x\in\Omega : |u(x)-u_\Omega|>2^n k\alpha\right\}\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^k}|\Omega| = \alpha\alpha^{-(k+1)}|\Omega|\\ &\leqslant \alpha\alpha^{-s/(2^n\alpha)}|\Omega| = \alpha e^{-As}|\Omega|,\end{aligned}$$

这里 $A=(2^n\alpha)^{-1}\ln\alpha$. 定理得证.

**定理 4.2.2** 假设存在正常数 $C_1$ 和 $C_2$, 使对任意的 $\Omega'\subset\Omega$ 都有

$$\left|\left\{x\in\Omega' : |u(x)-u_{\Omega'}|>s\right\}\right|\leqslant C_1|\Omega'|e^{-C_2 s},$$

那么 $u\in \mathrm{BMO}(\Omega)$.

**证明** 在引理 4.2.1 中取 $p=1$ 并用 $u-u_{\Omega'}$ 代替 $u$, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'}|u-u_{\Omega'}|\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left|\left\{x\in\Omega' : |u(x)-u_{\Omega'}|>s\right\}\right|\mathrm{d}s\\ &\leqslant C_1|\Omega'|\int_0^\infty e^{-C_2 s}\mathrm{d}s = \frac{C_1}{C_2}|\Omega'|,\end{aligned}$$

于是 $|u|_{*,\Omega}\leqslant C_1/C_2$, 故 $u\in\mathrm{BMO}(\Omega)$. 定理得证.

应用定理 4.2.1 和 4.2.2, 立即得到

**推论 4.2.1** $u\in\mathrm{BMO}(\Omega)$ 当且仅当存在正常数 $C_1$ 和 $C_2$, 使得对任何 $\Omega'\subset\Omega$, 都有

$$\left|\left\{x\in\Omega' : |u(x)-u_{\Omega'}|>s\right\}\right|\leqslant C_1|\Omega'|e^{-C_2 s}.$$

按照范数的定义容易证明下面的引理.

**引理 4.2.3** 当 $p\geqslant 1$ 时, $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega)$, 且存在正常数 $C=C(n,p)$, 使

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)},\quad \forall\, u\in\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega).$$

从而由式 (4.2.1) 知 $\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{BMO}(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_{*,\Omega}\leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)},\quad \forall\, u\in \mathcal{L}^{p,1}(\Omega).$$

**定理 4.2.3** 如果 $u\in \mathrm{BMO}(\Omega)$, 那么对于任何 $p\geqslant 1$, 都有 $u\in \mathcal{L}^{p,1}(\Omega)$, 并且 $[u]_{\mathcal{L}^{p,1},\Omega}\leqslant C[u]_{*,\Omega}$, 这里的常数 $C$ 仅依赖于 $n,p$.

**证明** 对于任意的 $\Omega'\subset\Omega$, 由引理 4.2.1 及定理 4.2.1, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Omega'|}\int_{\Omega'}|u(x)-u_{\Omega'}|^p\mathrm{d}x&=\frac{p}{|\Omega'|}\int_0^\infty s^{p-1}|\{x\in\Omega': |u(x)-u_{\Omega'}|>s\}|\,\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{p}{|\Omega'|}\int_0^\infty s^{p-1}C_1|\Omega'|\exp\left(-\frac{C_2}{[u]_{*,\Omega}}s\right)\mathrm{d}s\\&=pC_1C_2^{-p}[u]_{*,\Omega}^p\int_0^\infty s^{p-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\\&\leqslant C[u]_{*,\Omega}^p.\end{aligned}$$

由此知定理的结论成立. 证毕

利用引理 4.2.3 和定理 4.2.3 立即得到

**定理 4.2.4** 对于任意的 $p\geqslant 1$, 有

$$\mathcal{L}^{p,1}(\Omega)\simeq \mathcal{L}^{1,1}(\Omega)\simeq \mathrm{BMO}(\Omega).$$

## 4.3 关于抛物距离的 Morrey 空间, Campanato 空间和 BMO 空间

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, 记 $\boldsymbol{x}=(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 或 $\boldsymbol{x}=(x,t_x)$, 定义

$$\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(|x-y|^2+|t_x-t_y|)^{1/2},$$

称之为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的抛物距离. 容易知道, 抛物球 $I(\boldsymbol{x},\rho)=\{\boldsymbol{y}: \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\rho\}$ 是凸的, 并且存在正常数 $M_1$ 和 $M_2$ 使得

$$M_1\rho^{n+2}\leqslant|I(\boldsymbol{x},\rho)|\leqslant M_2\rho^{n+2}.$$

设 $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是有界区域, 用 $d=\mathrm{diam}_\delta(Q)$ 表示区域 $Q$ 关于抛物距离 $\delta(x,y)$ 的直径. 对于 $x\in Q$ 和 $\rho>0$, 记 $Q_{\rho,x}=Q\cap I(x,\rho)$.

**定义 4.3.1**　对于 $p\geqslant 1$ 及 $\theta\geqslant 0$, 定义

$$L_\delta^{p,\theta}(Q)=\left\{u\in L^p(Q):\sup_{\substack{x\in Q\\0<\rho\leqslant d}}\frac{1}{|Q_{\rho,x}|^\theta}\int_{Q_{\rho,x}}|u(y)|^p\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{L_\delta^{p,\theta}(Q)}=\sup_{\substack{x\in Q\\0<\rho\leqslant d}}\left(\frac{1}{|Q_{\rho,x}|^\theta}\int_{Q_{\rho,x}}|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

称 $L_\delta^{p,\theta}(Q)$ 是关于距离 $\delta$ 的 Morrey 空间.

**定义 4.3.2**　对于 $x\in Q$ 和 $0<\rho\leqslant d$, 定义

$$u_{\rho,x}=\frac{1}{|Q_{\rho,x}|}\int_{Q_{\rho,x}}u(y)\mathrm{d}y.$$

对于 $p\geqslant 1$ 及 $\theta\geqslant 0$, 定义

$$\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)=\left\{u\in L^p(Q):\sup_{\substack{x\in Q\\0<\rho\leqslant d}}\frac{1}{|Q_{\rho,x}|^\theta}\int_{Q_{\rho,x}}|u(y)-u_{\rho,x}|^p\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

并赋予范数

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)}&=\|u\|_{p,Q}+\sup_{\substack{x\in Q\\0<\rho\leqslant d}}\left(\frac{1}{|Q_{\rho,x}|^\theta}\int_{Q_{\rho,x}}|u(y)-u_{\rho,x}|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\&\triangleq\|u\|_{p,Q}+[u]_{\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)},\end{aligned}$$

称 $\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)$ 为关于距离 $\delta$ 的Campanato 空间.

容易证明 $L_\delta^{p,\theta}(Q)$ 和 $\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)$ 都是 Banach 空间.

定义

$$C_\delta^\alpha(\overline{Q})=\left\{u\in C(\overline{Q}):\sup_{\substack{x,y\in Q\\x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{\delta^\alpha(x,y)}<\infty\right\},$$

称之为关于抛物距离的 Hölder 空间. 该空间中的函数被称为具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续函数. 记

$$[u]_\alpha := [u]_{\alpha,Q} = \sup_{\substack{x,y\in Q\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\delta^\alpha(x,y)},$$

$$|u|_\alpha := |u|_{\alpha,Q} = \max_{\bar{Q}} |u| + [u]_\alpha.$$

**定义 4.3.3** 有界平均振幅函数空间 $\mathrm{BMO}_\delta(Q)$ 是 $L^1(Q)$ 中所有满足

$$[u]_{*,Q} := \sup_{Q'\subset Q} \fint_{Q'} |u(x)-u_{Q'}|\mathrm{d}x < \infty$$

的函数构成的线性空间. 这里 $u_{Q'}$ 是 $u$ 在 $Q'$ 上的平均. 对于 $u\in \mathrm{BMO}_\delta(Q)$, 称 $[u]_{*,Q}$ 为 $u$ 的半范数.

易证明 $\|u\|_{*,Q} = \|u\|_{L^1(Q)} + [u]_{*,Q}$ 是 $\mathrm{BMO}_\delta(Q)$ 上的范数, 并且 $\mathrm{BMO}_\delta(Q)$ 在该范数下是 Banach 空间. 空间 $\mathrm{BMO}_\delta(Q)$ 通常又被称为 John-Nirenberg 空间. 由定义可看出

$$\mathcal{L}_\delta^{1,1}(Q) \cong \mathrm{BMO}_\delta(Q).$$

**定义 4.3.4** 有界区域 $Q$ 被称为 (A) 型区域, 是指存在正常数 $A$, 使得对于任意的 $x\in Q$ 以及 $0<\rho\leqslant \mathrm{diam}_\delta(Q)$, 都有 $|Q_{\rho,x}| \geqslant A\rho^{n+2}$.

**命题 4.3.1** 设 $Q$ 是 (A) 型区域, $u\in \mathcal{L}_\delta^{2,\theta}(Q)$.

(1) 如果 $0\leqslant\theta<1$, $b\in L^\infty(Q)$, 则 $bu\in \mathcal{L}_\delta^{2,\theta}(Q)$;

(2) 如果 $0<\alpha\leqslant 1$, $1\leqslant\theta\leqslant 1+2\alpha/(n+2)$, $b\in C_\delta^\alpha(\bar{Q})$, 则 $bu\in \mathcal{L}_\delta^{2,\theta}(Q)$.

**证明** 为了简化记号, 在空间和范数中都略去 $Q$ 和 $\delta$, 并记 $D=Q_{\rho,x}$.

(1) 因为当 $0\leqslant\theta<1$ 时, $\mathcal{L}^{2,\theta}\cong L^{2,\theta}$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|D|^{\theta}}\int_D |b(y)u(y)-(bu)_{\rho,x}|^2\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{|D|^{\theta}}\int_D\left(⨍_D[b(y)u(y)-b(z)u(z)]\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{|D|^{\theta}}\int_D\left(⨍_D\{b(y)[u(y)-u(z)]+u(z)[b(y)-b(z)]\}\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y\\
\leqslant&\frac{2}{|D|^{\theta}}\int_D\left[\left(⨍_D b(y)[u(y)-u(z)]\mathrm{d}z\right)^2+\left(⨍_D u(z)[b(y)-b(z)]\mathrm{d}z\right)^2\right]\mathrm{d}y\\
=&\frac{2}{|D|^{\theta}}\int_D\left(b^2(y)|u(y)-u_{\rho,x}|^2+\frac{1}{|D|^2}\left|\int_D u(z)[b(y)-b(z)]\mathrm{d}z\right|^2\right)\mathrm{d}y\\
\leqslant&\frac{2\|b\|_{\infty}^2}{|D|^{\theta}}\int_D|u(y)-u_{\rho,x}|^2\mathrm{d}y+\frac{2}{|D|^{2+\theta}}\int_D\mathrm{d}y\int_D u^2(z)\mathrm{d}z\\
&\times\int_D|b(y)-b(z)|^2\mathrm{d}z \qquad (4.3.1)\\
\leqslant&\, 2\|b\|_{\infty}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2+8\|b\|_{\infty}^2\|u\|_{L^{2,\theta}}^2\\
\leqslant&\, C\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2
\end{aligned}
$$

于是 $bu\in\mathcal{L}^{2,\theta}$.

(2) 先考虑 $\theta>1$ 的情况. 由于当 $1<\theta\leqslant 1+2\alpha/(n+2)$ 时 $\mathcal{L}^{2,\theta}\hookrightarrow C^{\alpha^*}$, 其中 $\alpha^*=(n+2)(\theta-1)/2$, 因此 $u\in L^{\infty}$. 又因为 $b\in C^{\alpha}$, 所以 $b\in L^{\infty}$. 于是当 $1<\theta\leqslant 1+2\alpha/(n+2)$ 时, 由式 (4.3.1) 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|D|^{\theta}}\int_D|bu-(bu)_{\rho,x}|^2\mathrm{d}y\\
\leqslant&\frac{2\|b\|_{\infty}^2}{|D|^{\theta}}\int_D|u-u_{\rho,x}|^2\mathrm{d}y+\frac{2}{|D|^{2+\theta}}\int_D\mathrm{d}y\int_D u^2(z)\mathrm{d}z\int_D|b(y)-b(z)|^2\mathrm{d}z\\
\leqslant&\, 2\|b\|_{\infty}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2+\frac{2\|b\|_{\alpha}^2\|u\|_{\infty}^2}{|D|^{1+\theta}}\int_D\int_D\delta^{2\alpha}(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
\leqslant&\, C\|b\|_{\infty}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2+C\|b\|_{\alpha}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2\rho^{2\alpha}\rho^{(n+2)(1-\theta)}\\
\leqslant&\, C\|b\|_{\infty}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2+C\|b\|_{\alpha}^2\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta}}^2 d^{(n+2)(1-\theta)+2\alpha}
\end{aligned}
$$

从而 $bu\in\mathcal{L}^{2,\theta}$.

当 $\theta = 1$ 时, 取 $0 < \theta_0 < 1$ 则 $u \in \mathcal{L}^{2,\theta_0} \simeq L^{2,\theta_0}$. 同上,

$$
\begin{aligned}
&\fint_D |bu - (bu)_{\rho,x}|^2 \mathrm{d}y \\
\leqslant\ & 2\|b\|_\infty^2 \fint_D |u - u_{\rho,x}|^2 \mathrm{d}y + \frac{2}{|D|^3} \int_D \mathrm{d}y \int_D u^2(z)\mathrm{d}z \int_D |b(y) - b(z)|^2 \mathrm{d}z \\
\leqslant\ & 2\|b\|_\infty^2 \|u\|_{\mathcal{L}^{2,1}}^2 + C\|b\|_\alpha^2 \|u\|_{L^{2,\theta_0}}^2 |D|^{\theta_0 - 3} \int_D \int_D \delta^{2\alpha}(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
\leqslant\ & C\|u\|_{\mathcal{L}^{2,1}}^2 + C\|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta_0}}^2 \rho^{(\theta_0-1)(n+2)+2\alpha}.
\end{aligned}
$$

若取 $0 < \theta_0 < 1$ 使 $(\theta_0 - 1)(n+2) + 2\alpha = 0$, 则有

$$
\fint_D |bu - (bu)_{\rho,x}|^2 \mathrm{d}y \leqslant C\left(\|u\|_{\mathcal{L}^{2,1}}^2 + \|u\|_{\mathcal{L}^{2,\theta_0}}^2\right) \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^{2,1}}^2.
$$

于是 $bu \in \mathcal{L}^{2,1} = \mathcal{L}^{2,\theta}$ (因为此时 $\theta = 1$). 证毕.

同于 4.1 节和 4.2 节, 我们可以证明下面的 4 个定理——定理 4.3.1 ~ 定理 4.3.4.

**定理 4.3.1 (John-Nirenberg 定理)** 设 $u \in \mathrm{BMO}_\delta(Q)$, 则存在仅依赖于 $n$ 的正常数 $C_1$ 和 $C_2$, 使得对所有 $Q' \subset Q$, 都有

$$
\left|\left\{x \in Q' : |u(x) - u_{Q'}| > s\right\}\right| \leqslant C_1 |Q'| \exp\left(-\frac{C_2}{[u]_{*,Q}} s\right).
$$

**定理 4.3.2** $u \in \mathrm{BMO}_\delta(Q)$ 当且仅当存在正常数 $C_1$ 和 $C_2$, 使得对任何 $Q' \subset Q$, 都有

$$
\left|\left\{x \in Q' : |u(x) - u_{Q'}| > s\right\}\right| \leqslant C_1 |Q'| \mathrm{e}^{-C_2 s}.
$$

**定理 4.3.3** 空间 $L_\delta^{p,\theta}(Q)$ 有以下性质

(1) $L_\delta^{p,0}(Q) \simeq L^p(Q)$, $L_\delta^{p,1}(Q) \cong L^\infty(Q)$.

(2) 如果 $\theta > 1$, 则 $L_\delta^{p,\theta}(Q) \cong \{0\}$.

(3) 如果 $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $\theta, \sigma \geqslant 0$ 且满足 $(1 - \sigma)/q \leqslant (1 - \theta)/p$, 则

$$
L_\delta^{q,\sigma}(Q) \hookrightarrow L_\delta^{p,\theta}(Q), \quad \mathcal{L}_\delta^{q,\sigma}(Q) \hookrightarrow \mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q).
$$

**定理 4.3.4** 设 $Q$ 是 (A) 型区域, $p \geqslant 1$

(1) 当 $0 \leqslant \theta < 1$ 时, $\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q) \cong L_\delta^{p,\theta}(Q)$.

(2) 当 $1 < \theta \leqslant 1 + p/(n+2)$ 时, $\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q) \simeq C_\delta^{\alpha}(\overline{Q})$ 其中 $\alpha = (n+2)(\theta-1)/p$;

(3) 当 $\theta > 1 + p/(n+2)$ 时, $\mathcal{L}_\delta^{p,\theta}(Q)$ 中的函数都是常数,

(4) $\mathcal{L}_\delta^{p,1}(Q) \cong \mathcal{L}_\delta^{1,1}(Q) \cong \mathrm{BMO}_\delta(Q)$

## 习题

**4.1** 证明引理 4.1.1 的性质 (4)

**4.2** 证明引理 4.1.2.

**4.3** 设 $u \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, 并且对于任意的 $\rho \in (0,1)$ 和 $x \in \Omega$, 都有

$$\operatorname*{Osc}_{\Omega_\rho^x} u = \sup_{\Omega_\rho^x} u - \inf_{\Omega_\rho^x} u \leqslant C\rho^\alpha,$$

其中 $C$ 是正常数. 试证明 $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$

**4.4** 证明命题 4.1.1

**4.5** 证明关系式 (4.2.1).

**4.6** 证明引理 4.2.3.

**4.7** 证明定理 4.3.1 ~ 定理 4.3.4.

# 第五章　关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间

研究发展方程的解需要含有时间 $t$ 的 Sobolev 空间. 一般来说, 在一个发展方程中, 关于空间变量 $x$ 的最高阶导数的阶数与时间变量 $t$ 的最高阶导数的阶数是不同的. 因此, 我们不能把 $x$ 和 $t$ 同等看待, 需要引入 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间. 关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间有很多种, 不同的应用背景对应着不同种类的这种空间. 限于篇幅, 这里只介绍与二阶抛物型方程的研究相关的一类 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间.

设 $T>0$, 并记 $Q_T=\Omega\times(0,T]$. 对于一个定义在 $Q_T$ 上的函数 $u(x,t)$, 可以按照第 2.1 节的方式来定义 $u$ 关于 $x$ 和 $t$ 的弱导数. 通常把函数 $u$ 关于空间变量 $x$ 的弱导数记为 $D_x^\beta u$ 或 $D^\beta u$, 而把关于 $t$ 的弱导数记为 $D_t^r u$, 当 $r=1$ 时也记为 $u_t$. 用 $D_t^r D_x^\beta u$ 表示 $u$ 关于 $x$ 的 $\beta$ 阶、关于 $t$ 的 $r$ 阶混合弱偏导数.

## 5.1　关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Hölder 空间

对于 $u \in L^\infty(Q_T)$, 简记 $|u|_0 = |u|_{0,Q_T} = \|u\|_{\infty,Q_T}$.

在第 4.3 节, 我们已经定义了关于抛物距离的 Holder 空间 $C_\delta^\alpha(\overline{Q}_T)$, 以及它上的半范数

$$[u]_{\alpha,Q_T} = \sup_{\substack{x,y\in Q_T\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\delta^\alpha(x,y)}$$

和范数

$$|u|_{\alpha,Q_T} = \|u\|_{\infty,Q_T} + [u]_{\alpha,Q_T},$$

这里的 $\delta = \delta(x,y)$ 是 $x$ 与 $y$ 之间的抛物距离. 有时又把 $C_\delta^\alpha(\overline{Q}_T)$ 写成 $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$. 若 $u \in C_\delta^\alpha(\overline{Q}_T)$, 则称 $u$ 在 $Q_T$ 上是整体 Holder 连续函数.

下面再定义高阶导数的 Hölder 连续性. 因为二阶抛物型方程关于 $x$ 的导数是二阶, 关于 $t$ 的导数是一阶, 与抛物距离的想法相同, 关于 $x$ 的导数的阶数与关于 $t$ 的导数的阶数之间也应该是 2 倍关系.

设 $0<\alpha<1$, 先定义沿着 $t$ 方向的 Holder 半模

$$[u]^t_{\alpha,Q_T} = \sup_{x\in\Omega}\sup_{\substack{t,s\in(0,T)\\ t\neq s}} \frac{|u(x,t)-u(x,s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

设 $k$ 是正整数, 引入半范数 (半模)

$$[u]_{k+\alpha,Q_T} = \sum_{|\beta|+2r=k} [D_t^r D_x^\beta u]_{\alpha,Q_T} + \sum_{|\beta|+2r=k-1} [D_t^r D_x^\beta u]^t_{\frac{1+\alpha}{2},Q_T},$$

以及范数

$$|u|_{k+\alpha} = |u|_{k+\alpha,Q_T} = \sum_{|\beta|+2r\le k} \|D_t^r D_x^\beta u\|_{\infty,Q_T} + [u]_{k+\alpha,Q_T}.$$

定义 Holder 空间

$$C_\delta^{k+\alpha}(\overline{Q}_T) = C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) = \{u : |u|_{k+\alpha,Q_T} < \infty\}.$$

通常简记

$$[D^2u]_\alpha = [D^2u]_{\alpha,Q_T} = \sup_{i,j}[D_{ij}u]_{\alpha,Q_T},$$
$$[Du]_\alpha = [Du]_{\alpha,Q_T} = \sup_{i}[D_iu]_{\alpha,Q_T}.$$

**性质 5.1.1** $[uv]_\alpha \leqslant |u|_0[v]_\alpha + [u]_\alpha|v|_0$.

**定理 5.1.1** 设 $\Omega$ 是锥形区域, $Q_T = \Omega\times(0,T]$, $u \in C_*^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)$, 则对于任意的 $0 < \varepsilon \leqslant 1$, 下面的内插不等式成立

$$|Du|_0 \leqslant \varepsilon[u]_{2+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon^{1/(1+\alpha)}}|u|_0,$$
$$|D^2u|_0 \leqslant \varepsilon[u]_{2+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon^{2/\alpha}}|u|_0,$$
$$|D_tu|_0 \leqslant \varepsilon[u]_{2+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon^{2/\alpha}}|u|_0,$$

其中正常数 $C$ 仅依赖于空间维数 $n$、有限锥 $V$ 和 $\alpha$.

该定理的证明同于定理 1.4.3, 留作习题.

## 5.2 关于 $x$ 与 $t$ 异性的 Sobolev 空间的定义

假设 $u$ 是 $Q_T$ 上的可测函数, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. 定义

$$\|u\|_{p,q,Q_T} = \|u\|_{L^{p,q}(Q_T)} = \left(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|_{p,\Omega}^q \mathrm{d}t\right)^{1/q},$$
$$L^{p,q}(Q_T) = \{u : \|u\|_{p,q,Q_T} < \infty\},$$

那么 $L^{p,q}(Q_T)$ 是一个 Banach 空间. 常常略去下标 $Q_T$, 把 $\|u\|_{p,q,Q_T}$ 简写成 $\|u\|_{p,q}$. 空间 $L^{p,q}(Q_T)$ 上的 Hölder 不等式是

$$\int_{Q_T} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \|u\|_{p,q}\|v\|_{p',q'},$$

其中 $p, q, p', q'$ 满足 $1/p + 1/p' = 1, 1/q + 1/q' = 1$. 空间 $L^{p,q}(Q_T)$ 的一个特例是 $q = p$, 它就是通常的 $L^p(Q_T)$.

同于整数次 Sobolev 空间, 为了书写方便, 我们记

$$D_x^\ell u = \left\{D_x^\beta u : |\beta| = \ell\right\}, \quad \|D_x^\ell u\|_{p,Q_T} = \left(\sum_{|\beta|=\ell}\int_{Q_T} |D_x^\beta u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

由于二阶抛物型方程关于 $x$ 的导数是二阶, 关于 $t$ 的导数是一阶, 这两个阶数之间是 2 倍关系. 因此在抛物型方程的研究中应用最多的是形如 $W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 的空间. 我们先处理 $k$ 是偶数的情况, 即定义空间 $W_p^{2k,k}(Q_T)$.

**定义 5.2.1**　*设 $k$ 是正整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 用 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 表示集合*

$$\left\{u \in L^p(Q_T) : D_x^\ell D_t^r u \in L^p(Q_T), \ \forall \ell + 2r \leqslant 2k\right\},$$

*赋予范数*

$$\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)} = \left(\sum_{\ell+2r\leqslant 2k} \|D_t^r D_x^\ell u\|_{p,Q_T}^p\right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

$$\|u\|_{W_\infty^{2k,k}(Q_T)} = \sum_{\ell+2r\leqslant 2k} \|D_t^r D_x^\ell u\|_{\infty,Q_T}$$

*后得到的 Banach 空间.*

下面处理 $k$ 是奇数的情况. 此时 $k/2 = j + 1/2$, $j$ 是非负整数, 这就相当于在 $t$ 方向是分数阶 (1/2 阶) Sobolev 空间, 因此在 $t$ 方向需要引入实指数半模.

对于区域 $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, 其中 $-\infty \leqslant T_1 < T_2 \leqslant \infty$ 以及 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$, 定义 (见 3.3 节)

$$[u]_{L_{p,t}^\alpha(Q)} = \left(\int_\Omega \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{|u(x,t) - u(x,s)|^p}{|t-s|^{1+\alpha p}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{5.2.1}$$

特别地, 当 $T_1 = -\infty, T_2 = \infty$ 时, 容易证明

$$[u]_{L_{p,t}^\alpha(Q)} = 2^{1/p}\left(\int_0^\infty \frac{\|\Delta_{t,h} u\|_{p,Q}^p}{h^{1+\alpha p}} \mathrm{d}h\right)^{1/p}, \tag{5.2.2}$$

其中 $\Delta_{t,h}u(x,t)=u(x,t+h)-u(x,t)$. 在抛物型方程研究中最常用的是一个特殊情形: $Q=Q_T$,

$$[u]_{L_p^\alpha(Q_T)}=\left(\int_\Omega\int_0^T\int_0^T\frac{|u(x,t)-u(x,s)|^p}{|t-s|^{1+\alpha p}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

**定义 5.2.2** 设 $k$ 是奇数, $1\leqslant p<\infty$. 定义

$$\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}=\sum_{\ell+2r\leqslant k}\|D_t^rD_x^\ell u\|_{p,Q_T}+\sum_{\ell+2r=k-1}[D_t^rD_x^\ell u]_{L_p^{1/2}(Q_T)},$$

并用 $W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 表示空间 $L^p(Q_T)$ 中所有满足 $\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}<\infty$ 的函数构成的空间. 易证 $W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 是 Banach 空间.

分别用 $\partial_lQ_T$ 和 $\partial_pQ_T$ 表示 $Q_T$ 的侧边界 $\partial\Omega\times(0,T)$ 和抛物边界 $\partial_lQ_T\cup(\Omega\times\{0\})$. 用 $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 表示在 $Q_T$ 的侧边界 $\partial_lQ_T$ 附近为零而在 $\overline{Q}_T$ 上无穷次连续可微的函数的集合. 用 $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 表示在 $Q_T$ 的抛物边界 $\partial_pQ_T$ 附近为零, 而在 $\overline{Q}_T$ 上无穷次连续可微的函数的集合.

分别用 $\overset{\circ}{W}{}_p^{k,k/2}(Q_T)$ 和 $\overset{\bullet}{W}{}_p^{k,k/2}(Q_T)$ 表示 $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 和 $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 在空间 $W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 中的闭包.

## 5.3 $W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 的基本性质 —— 延拓、逼近和内插不等式

在以后的各节中, 我们总假设 $\Omega$ 是有界开集. 为了记号上的方便, 当 $k$ 为偶数时, 记半范数 (半模)

$$[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}=\sum_{\ell+2r=k}\|D_t^rD_x^\ell u\|_{p,Q_T};$$

当 $k$ 为奇数时, 记半范数 (半模)

$$[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}=\sum_{\ell+2r=k}\|D_t^rD_x^\ell u\|_{p,Q_T}+\sum_{\ell+2r=k-1}[D_t^rD_x^\ell u]_{L_p^{1/2}(Q_T)},$$

那么

$$\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}=[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}+\sum_{\ell+2r<k}\|D_t^rD_x^\ell u\|_{p,Q_T}.$$

**定理 5.3.1**　设 $\partial\Omega \in C^k$ 并记 $d = \mathrm{diam}(\Omega)$, 表示 $\Omega$ 的直径, 则存在延拓算子 $E: W_p^{k,k/2}(Q_T) \to W_p^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})$, 满足

(1) 对于任意的 $u \in W_p^{k,k/2}(Q_T)$, 有

$$Eu(x,t) = u(x,t), \quad \text{a.e. } (x,t) \in Q_T.$$

(2) 存在正常数 $C = C(n,k,p,d^{-1},T^{-1},\partial\Omega)$, 使得

$$\|Eu\|_{W_p^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}, \quad \forall\, u \in W_p^{k,k/2}(Q_T).$$

(3) $Eu$ 的支集属于 $\Omega_d \times (-T, 2T)$, 这里 $\Omega_d = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x,\Omega) < d\right\}$.

**证明**　第一步　先利用定理 2.3.1 (取那里的 $G = \Omega_d$), 在 $x$ 方向上把函数 $u(\cdot,t)$ 延拓到 $\mathbb{R}^n \times (0,T]$, 使得在 $(\Omega_d)^c \times (0,T]$ 上 $u = 0$ 且

$$\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T^d)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)},$$

这里 $(\Omega_d)^c$ 表示 $\Omega_d$ 的余集, $Q_T^d = \Omega_d \times (0,T]$. 为了书写方便, 仍然把延拓后的函数记为 $u$.

第二步　利用定理 2.3.1 的思想, 在 $t$ 方向上延拓 $u$. 我们只讨论 $k$ 为奇数的情况, 因为当 $k$ 为偶数时, 处理方法类似且更为简单.

记 $m = [k/2]$, 先把 $u$ 延拓到 $Q_T^* = \Omega_d \times [-T,T]$ 上. 为此, 我们定义函数

$$Eu(x,t) = \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t) \in \Omega_d \times [0,T], \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} c_i u(x,-t/i), & (x,t) \in \Omega_d \times [-T,0], \end{cases}$$

其中 $c_1,\cdots,c_{m+1}$ 是方程组

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1/i)^j c_i = 1, \quad j = 0,1,\cdots,m$$

的解. 显然 $E$ 是线性的. 容易验证, 对于 $0\leqslant \ell+2r\leqslant k$ 和 $(x,t)\in Q_T^*$ 成立

$$D_t^r D_x^\ell \tilde{u}=\begin{cases} D_t^r D_x^\ell u, & t\geqslant 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}(-1/i)^r c_i D_t^r D_x^\ell u(x,-t/i), & t<0. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

由此知

$$\sum_{\ell+2r\leqslant k}\|D_t^r D_x^\ell \tilde{u}\|_{L^p(Q_T^*)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T^+)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)},$$

其中常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p$. 再证明

$$\sum_{\ell+2r=k-1}[D_t^r D_x^\ell \tilde{u}]_{t,p,\frac{1}{2};Q_T^*}\leqslant C[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T^+)}. \tag{5.3.2}$$

只讨论 $\ell=0,r=m=[k/2]$ 的情况, 其他情况类似. 利用式 (5.2.1) 知

$$\begin{aligned}[D_t^r \tilde{u}]^p_{t,p,\frac{1}{2};Q_T^*}&=\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int_{-T}^{T}\frac{|D_t^r\tilde{u}(x,t)-D_t^r\tilde{u}(x,s)|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}s\\ &=\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^T f(x,t,s)\mathrm{d}s+\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_{-T}^0\mathrm{d}t\\ &\quad\int_{-T}^0 f(x,t,s)\mathrm{d}s+2\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\mathrm{d}t\int_{-T}^0 f(x,t,s)\mathrm{d}s\\ &=I_1+I_2+2I_3,\end{aligned}$$

其中 $f(x,t,s)=\dfrac{|D_t^r \tilde{u}(x,t)-D_t^r\tilde{u}(x,s)|^p}{|t-s|^{1+p/2}}$.

显然有

$$I_1\leqslant [u]^p_{W_p^{k,k/2}(Q_T^+)}.$$

注意到式 (5.3.1), 有

$$I_2=\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_{-T}^0\mathrm{d}t\int_{-T}^0\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{r+1}c_i(-1/i)^r[D_t^r u(x,-t/i)-D_t^r u(x,-s/i)]\right|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}s.$$

由此推知

$$I_2 \leqslant C\sum_{i=1}^{r+1}\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_{-T}^{0}\mathrm{d}t\int_{-T}^{0}\frac{|D_t^r u(x,-t/i)-D_t^r u(x,-s/i)|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}s$$

再作变量替换 $-t/i\longrightarrow t, -s/i\longrightarrow s$, 就得到

$$I_2 \leqslant C\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\int_0^T\frac{|D_t^r u(x,t)-D_t^r u(x,s)|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\leqslant C\|u\|^p_{W_p^{k,k/2}(Q_T^+)}$$

现在估计 $I_3$. 应用式 (5.3.1) 知

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\mathrm{d}t\int_{-T}^{0}\frac{\left|\sum_{i=1}^{r+1}c_i(-1/i)^r[D_t^r u(x,t)-D_t^r u(x,-s/i)]\right|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\sum_{i=1}^{r+1}\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^{T/i}\frac{|D_t^r u(x,t)-D_t^r u(x,s)|^p}{|t+is|^{1+p/2}}\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\int_{\Omega_d}\mathrm{d}x\int_0^T\int_0^T\frac{|D_t^r u(x,t)-D_t^r u(x,s)|^p}{|t-s|^{1+p/2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\leqslant C\|u\|^p_{W_p^{k,k/2}(Q_T^+)}\end{aligned}$$

综合以上估计就推出式 (5.3.2), 从而有

$$\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T^-)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}.$$

类似地, 可以把 $\tilde{u}$ 延拓到 $\Omega_d\times[-T,2T]$ 上成为 $u^*$. 取截断函数

$$\zeta(x,t)\in C_0^\infty(\Omega_d\times(-T,2T)),\quad 在\ \overline{\Omega}\times[0,T]\ 上\ \zeta=1.$$

定义 $Eu(x,t)=\zeta u^*(x,t)$, 即为所求. 证毕.

**定理 5.3.2** *设 $\partial\Omega\in C^k$, 那么存在正常数 $C=C(k,p,T,\Omega)$, 使得对任意的 $u\in W_p^{k,k/2}(Q_T)$, 都存在 $u_m\in C_0^\infty(\Omega_d\times(-T,2T))$, 满足*

*(1) 在 $W_p^{k,k/2}(\Omega_d\times(-T,2T))$ 中 $u_m$ 收敛到某个 $\tilde{u}$, 并且限制在 $Q_T$ 上 $\tilde{u}=u$.*

*(2) $\|u_m\|_{W_p^{k,k/2}(\Omega_d\times(-T,2T))}\leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}$.*

**证明** 这里只叙述证明梗概，细节留作习题。先用延拓定理把 $u$ 延拓到 $\mathbb{R}^{n+1}$，延拓后的函数记为 $Eu$，使其支集属于 $\tilde{Q}_\delta=\Omega_{d-2\delta}\times(-T+2\delta,2(T-2\delta))$，其中 $0<\delta\ll 1$。再把 $Eu$ 磨光，记为 $E^\varepsilon u$。由定理 1.5.1 的性质 (5) 知，当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，$E^\varepsilon u\in C_0^\infty(\Omega_d\times(-T,2T))$。记 $Q_\delta^*=\Omega_{d-\delta}\times(-T+\delta,2(T-\delta))$。同于 (2.2.1) 式可证，对于 $(x,t)\in Q_\delta^*$ 有 $D_x^\ell D_t^r(E^\varepsilon u)=\eta_\varepsilon*(D_x^\ell D_t^r(Eu))$。

如果 $k$ 是偶数，由定理 1.5.1 的性质 (4) 知，在 $W_p^{k,k/2}(Q_\delta^*)$ 中 $E^\varepsilon u\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+}Eu$，故结论 (1) 成立。

如果 $k$ 是奇数，由定理 1.5.1 的性质 (4) 知，

$$\sum_{\ell+2r\leqslant k}\|D_x^\ell D_t^r(E^\varepsilon u)-D_x^\ell D_t^r(Eu)\|_{p,Q_\delta^*}\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+}0.$$

类似于定理 3.5.2 第一步的证明可证

$$\sum_{\ell+2r=k-1}[D_x^\ell D_t^r(E^\varepsilon u)-D_x^\ell D_t^r(Eu)]_{t,L_p^{1/2}(Q_\delta^*)}\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+}0,$$

因而结论 (1) 也成立。

同于 (1.5.3) 式的证明，我们有

$$\|E^\varepsilon u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_\delta^*)}\leqslant\|Eu\|_{W_p^{k,k/2}(\Omega_d\times(-T,2T))},$$

再利用定理 5.3.1 的 (2) 可得结论 (2)。证毕。

**定理 5.3.3** 设 $\partial\Omega\in C^k$，则对于任意的 $0<\varepsilon\leqslant 1$，存在依赖于 $n,k,p,d^{-1},T^{-1}$ 和 $\Omega$ 的正常数 $C$，使得对所有满足 $0<\ell+2r=\mu<k$ 的非负整数 $\ell$ 和 $r$ 以及 $u\in W_p^{k,k/2}(Q_T)$ 都有

$$\|D_t^rD_x^\ell u\|_{p,Q_T}\leqslant\varepsilon\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}+\frac{C}{\varepsilon^{\mu/(k-\mu)}}\|u\|_{p,Q_T}.\tag{5.3.3}$$

**证明** 第一步 对于满足 $\ell<q\leqslant k$ 以及 $r<m\leqslant k/2$ 的正整数 $q$ 和 $m$，利用各向同性的 Sobolev 空间的内插不等式知，对于任意

的 $\varepsilon_0\in(0,1/2]$ 和 $\delta>0$, 有

$$\|D_x^\ell v\|_{p,Q_T}\leqslant\varepsilon_0\|D_x^q v\|_{p,Q_T}+\frac{C}{\varepsilon_0^{\ell/(q-\ell)}}\|v\|_{p,Q_T},\tag{5.3.4}$$

$$\|D_t^r u\|_{p,Q_T}\leqslant\delta\|D_t^m u\|_{p,Q_T}+\frac{C}{\delta^{r/(m-r)}}\|u\|_{p,Q_T}.\tag{5.3.5}$$

因为 $0<\ell+2r=\mu<k$, 在式 (5.3.4) 中取 $v=D_t^r u, q=k-2r$, 那么

$$\begin{aligned}\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q_T}&\leqslant\varepsilon_0\|D_x^{k-2r}D_t^r u\|_{p,Q_T}+\frac{C}{\varepsilon_0^{\ell/(k-2r-\ell)}}\|D_t^r u\|_{p,Q_T}\\&=\varepsilon_0\|D_x^{k-2r}D_t^r u\|_{p,Q_T}+\frac{C}{\varepsilon_0^{\ell/(k-\mu)}}\|D_t^r u\|_{p,Q_T}.\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

第二步　当 $k$ 为偶数时, 对不等式 (5.3.6) 右端第二项应用 (5.3.5) 式 (取 $m=k/2$), 则有

$$\begin{aligned}\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q_T}\leqslant{}&\varepsilon_0\|D_x^{k-2r}D_t^r u\|_{p,Q_T}\\&+\frac{C}{\varepsilon_0^{\ell/(k-\mu)}}\left(\delta\|D_t^{k/2}u\|_{p,Q_T}+\frac{C}{\delta^{2r/(k-2r)}}\|u\|_{p,Q_T}\right).\end{aligned}$$

取 $\delta=C^{-1}\varepsilon_0^{(k-2r)/(k-\mu)}$, 再记 $2\varepsilon_0=\varepsilon$ 即得式 (5.3.3).

第三步　证明 $k$ 为奇数时, 对于 $Q=\Omega\times\mathbb{R}$, $u\in W_p^{k,k/2}(Q)$ 的情况, 式 (5.3.3) 成立. 为此, 我们先证明

$$\|D_t u\|_{p,Q}\leqslant\varepsilon\|D_t u\|_{W_p^{1,\frac12}(Q)}+C\varepsilon^{-2}\|u\|_{p,Q}.\tag{5.3.7}$$

事实上, 对 $D_tu(x,t)=D_tu(x,t+h)-[D_tu(x,t+h)-D_tu(x,t)]$, 关于 $h$ 从 0 到 $\varepsilon$ 积分得

$$\begin{aligned}|D_tu(x,t)|\leqslant{}&\frac{1}{\varepsilon}|u(x,t+\varepsilon)-u(x,t)|\\&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon|D_tu(x,t+h)-D_tu(x,t)|\mathrm{d}h.\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

注意到这样的事实

$$\left\|\int_0^\varepsilon|f(\cdot,h)|\mathrm{d}h\right\|_{p,Q}\leqslant\int_0^\varepsilon\|f(\cdot,h)\|_{p,Q}\mathrm{d}h,\quad\forall f\in L^{p,1}(Q\times(0,\varepsilon)),\tag{5.3.9}$$

从不等式 (5.3.8) 便推出

$$\|D_t u\|_{p,Q} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|u\|_{p,Q} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|\Delta_{t,h}(D_t u)\|_{p,Q}\mathrm{d}h$$

对上式右端的第二项应用 Hölder 不等式, 得

$$\|D_t u\|_{p,Q} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|u\|_{p,Q} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^\varepsilon \frac{\|\Delta_{t,h}(D_t u)\|_{p,Q}^p}{h^{1+p/2}}\mathrm{d}h\right)^{1/p}$$

$$\times\left(\int_0^\varepsilon h^{q(1/p+1/2)}\mathrm{d}h\right)^{1/q},$$

其中 $q=p/(p-1)$. 经简单计算并注意到式 (5.2.2), 我们有

$$\|D_t u\|_{p,Q} \leqslant C\varepsilon^{1/2}[D_t u]_{L_p^{1/2}(Q)} + 2\varepsilon^{-1}\|u\|_{p,Q},$$

这里的 $\varepsilon$ 是不超过 1 的任意正数. 因而式 (5.3.7) 成立.

记 $m=(k-1)/2$. 应用式 (5.3.7) 得

$$\|D_t^m u\|_{p,Q} \leqslant \varepsilon[D_t^m u]_{L_p^{1/2}(Q)} + C\varepsilon^{-2}\|D_t^{m-1}u\|_{p,Q}. \tag{5.3.10}$$

再应用式 (5.3.5) 知

$$\|D_t^{m-1}u\|_{p,Q} \leqslant \delta\|D_t^m u\|_{p,Q} + \frac{C}{\delta^{m-1}}\|u\|_{p,Q}.$$

将其代入式 (5.3.10), 并取 $\delta=\varepsilon^2/(2C)$, $\varepsilon_0=2\varepsilon$, 我们有

$$\|D_t^m u\|_{p,Q} \leqslant \varepsilon_0[D_t^m u]_{L_p^{1/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon_0^{k-1}}\|u\|_{p,Q}. \tag{5.3.11}$$

在式 (5.3.5) 中取 $r<m=(k-1)/2$, $Q_T=Q$, 再把式 (5.3.11) 代入得

$$\|D_t^r u\|_{p,Q} \leqslant \delta\left(\varepsilon_0[D_t^m u]_{L_p^{1/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon_0^{k-1}}\|u\|_{p,Q}\right) + \frac{C}{\delta^{r/(m-r)}}\|u\|_{p,Q}.$$

对于任意的 $\sigma\in(0,1]$, 取

$$\delta=\sigma^{(k-1-2r)/(k-2r)},\quad \varepsilon_0=\sigma^{1/(k-2r)},$$

则有

$$\|D_t^r u\|_{p,Q} \leqslant \sigma[D_t^m u]_{L_p^{1/2}(Q)} + \frac{C}{\sigma^{2r/(k-2r)}}\|u\|_{p,Q}.$$

对于 $0<\ell+2r=\mu<k$, 将上式代入式 (5.3.6) (以 $Q$ 代替 $Q_T$), 并适当地选取 $\sigma$, 可得

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q} \leqslant \varepsilon[u]_{W_p^{k,k/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(k-\mu)}}\|u\|_{p,Q}, \tag{5.3.12}$$

即对应的式 (5.3.3).

第四步　证明 $k$ 为奇数时, 对于 $u\in W_p^{k,k/2}(Q_T)$, 式 (5.3.3) 成立.

先沿着 $t$ 方向把 $u$ 延拓成 $\tilde{u}\in W_p^{k,k/2}(Q)$, 使

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{W_p^{k,k/2}(Q)} &\leqslant C\|u\|_{W_p^{k,k/2}(Q_T)}\\ &= C\left([u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + \sum_{\ell+2r<k}\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q_T}\right).\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

对于 $\tilde{u}$ 而言, 由第三步的结论知式 (5.3.12) 成立. 取式 (5.3.12) 中的 $\varepsilon\ll 1$, 再利用式 (5.3.13), 我们有

$$\begin{aligned}\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q_T} &= \|D_x^\ell D_t^r \tilde{u}\|_{p,Q_T} \leqslant \|D_x^\ell D_t^r \tilde{u}\|_{p,Q}\\ &\leqslant \varepsilon[\tilde{u}]_{W_p^{k,k/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(k-\mu)}}\|\tilde{u}\|_{p,Q}\\ &\leqslant \varepsilon\|\tilde{u}\|_{W_p^{k,k/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(k-\mu)}}\|u\|_{p,Q_T}\\ &\leqslant \varepsilon C[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + \varepsilon C\sum_{\sigma+2\rho<k}\|D_x^\sigma D_t^\rho u\|_{p,Q_T}\\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(k-\mu)}}\|u\|_{p,Q_T}.\end{aligned}$$

取 $\delta=(\varepsilon C)^{1/(k-\mu)}$(不妨认为 $\delta<1$), 注意到 $\mu=\ell+2r<k$ 则有

$$\begin{aligned}&\delta^\mu\sum_{\ell+2r<k}\|D_x^\ell D_t^r u\|_{p,Q_T}\\ \leqslant{}& C\delta^k[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + C\delta^k\sum_{\sigma+2\rho<k}\|D_x^\sigma D_t^\rho u\|_{p,Q_T} + C\|u\|_{p,Q_T}\\ \leqslant{}& C\delta^k[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + C\delta^{\mu+1}\sum_{\sigma+2\rho<k}\|D_x^\sigma D_t^\rho u\|_{p,Q_T} + C\|u\|_{p,Q_T}\end{aligned}$$

只要式 (5.3.12) 中的 $\varepsilon \ll 1$, 就有 $C\delta < 1/2$. 于是

$$\delta^{\mu} \sum_{\ell+2r<k} \|D_x^{\ell} D_t^{r} u\|_{p,Q_T} \leqslant C\delta^{k}[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + \frac{\delta^{\mu}}{2} \sum_{\sigma+2\rho<k} \|D_x^{\sigma} D_t^{\rho} u\|_{p,Q_T} + C\|u\|_{p,Q_T},$$

故有

$$\sum_{\ell+2r<k} \delta^{\mu} \|D_x^{\ell} D_t^{r} u\|_{p,Q_T} \leqslant C\delta^{k}[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + C\|u\|_{p,Q_T}.$$

由此推出

$$\|D_x^{\ell} D_t^{r} u\|_{p,Q_T} \leqslant C\delta^{k-\mu}[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + \frac{C}{\delta^{\mu}}\|u\|_{p,Q_T}.$$

记 $C\delta^{k-\mu} = \tau$, 我们有

$$\|D_x^{\ell} D_t^{r} u\|_{p,Q_T} \leqslant \tau[u]_{W_p^{k,k/2}(Q_T)} + \frac{C}{\tau^{\mu/(k-\mu)}}\|u\|_{p,Q_T}.$$

定理得证.

## 5.4 Poincaré 不等式

设常数 $\rho > 0$. 记 $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$, $Q_\rho = B_\rho \times (-\rho^2, \rho^2)$. 对于 $\boldsymbol{x} = (x, t_x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 记 $Q_\rho^{\boldsymbol{x}} = B_\rho(x) \times (t_x - \rho^2, t_x + \rho^2)$.

**定理 5.4.1** 假设 $1 \leqslant p < \infty$, $r > 0$, 则存在正常数 $C = C(n, p)$, 使得

$$\int_{Q_r} |u - u_r|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant Cr^p [u]^p_{W_p^{1,1/2}(Q_r)}, \quad \forall\, u \in W_p^{1,1/2}(Q_r),$$

其中

$$u_r := u_{Q_r} = \fint_{Q_r} u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

**证明**　记

$$u_{B_r}(t) = \fint_{B_r} u(x,t)\mathrm{d}x.$$

作变量代换 $(x/r, t/r^2) \to (x,t)$, 可认为 $r=1$. 显然,

$$\int_{Q_1} |u - u_{Q_1}|^p \mathrm{d}z \leqslant 2^{p-1}\left(\int_{Q_1} |u - u_{B_1}(t)|^p \mathrm{d}z + \int_{Q_1} |u_{B_1}(t) - u_{Q_1}|^p \mathrm{d}z\right)$$
$$:= 2^{p-1}(I_1 + I_2)$$

应用 $W_p^1(B_1)$ 上的 Poincaré 不等式易知

$$I_1 \leqslant C \int_{Q_1} |Du|^p \mathrm{d}z,$$

其中常数 $C$ 仅依赖于 $n$ 和 $p$. 对于 $I_2$ 我们有

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant C \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \left|\int_{-1}^{1} \int_{B_1} |u(x,t) - u(x,s)| \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|^p \\
&\leqslant C \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \int_{-1}^{1} \int_{B_1} \frac{|u(x,t) - u(x,s)|^p}{|t-s|^{1+p/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C[u]^p_{L_p^{1/2}(Q_1)}.
\end{aligned}$$

综合上面的估计, 定理得证.

**定理 5.4.2**　*设 $1 \leqslant p < \infty$, $r > 0$. 则存在正常数 $C = C(n,p)$, 使*

*(1) 对于任意的 $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q_r)$, 有*

$$\int_{Q_r} |u|^p \mathrm{d}z \leqslant Cr^p \int_{Q_r} |Du|^p \mathrm{d}z + Cr^{2p} \int_{Q_r} |D_t u|^p \mathrm{d}z,$$

*(2) 对于任意的 $u \in W_p^1(Q_r)$, 有*

$$\int_{Q_r} |u - u_r|^p \mathrm{d}z \leqslant Cr^p \int_{Q_r} |Du|^p \mathrm{d}z + Cr^{2p} \int_{Q_r} |D_t u|^p \mathrm{d}z$$

*这里, $W_p^1(Q_r)$ 的定义同于第二章, 即*

$$W_p^1(Q_r) = \{u \in L^p(Q_r) : D_x u, D_t u \in L^p(Q_r)\},$$

*$\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q_r)$ 是 $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\bar{Q}_r)$ 在 $W_p^1(Q_r)$ 中的闭包.*

该定理的证明留做习题.

以后会经常用到这样一个简单事实. 对于任意的常数 $c$, 有

$$\int_{Q_r}|u-u_r|^p\mathrm{d}x\leqslant 2^p\int_{Q_r}|u-c|^p\mathrm{d}x. \tag{5.4.1}$$

当 $p=2$ 时, 还有更佳的结果

$$\int_{Q_r}|u-u_r|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{Q_r}|u-c|^2\mathrm{d}x. \tag{5.4.2}$$

证明留给读者.

**定理 5.4.3** 对于 $u\in W_p^{2,1}(Q_r)$, $p\geqslant 1$, 成立

$$\int_{Q_{r/2}}|Du-(Du)_{r/2}|^p\mathrm{d}x\leqslant Cr^p|u|^p_{W_p^{2,1}(Q_r)}, \tag{5.4.3}$$

$$\int_{Q_{r/2}}|u-x\cdot(Du)_{r/2}-u_{r/2}|^p\mathrm{d}x\leqslant Cr^{2p}|u|^p_{W_p^{2,1}(Q_r)}, \tag{5.4.4}$$

其中 $(Du)_r$ 是 $Du$ 在 $Q_r$ 上的平均, 常数 $C$ 仅依赖于 $n$ 和 $p$.

**证明** 第一步 证明不等式 (5.4.3). 作变量代换 $(x/r,t/r^2)\longrightarrow(x,t)$, 不妨设 $r=1$. 对于 $1/2\leqslant\rho\leqslant 1$, 利用 $W_p^1(B_\rho)$ 上的 Poincaré 不等式得

$$\begin{aligned}
I_\rho:=&\int_{Q_\rho}|Du-(Du)_\rho|^p\mathrm{d}x\\
\leqslant&\ 2^{p-1}\int_{Q_\rho}|Du-(Du)_{B_\rho}(t)|^p\mathrm{d}x+2^{p-1}\int_{Q_\rho}|(Du)_{B_\rho}(t)-(Du)_\rho|^p\mathrm{d}x\\
\leqslant&\ C\int_{Q_\rho}|D^2u|^p\mathrm{d}x+2^{p-1}\int_{Q_\rho}|(Du)_{B_\rho}(t)-(Du)_\rho|^p\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

接着估计上式右端的第一项. 对于 $1/2\leqslant\rho\leqslant 1$, 应用 Gauss 公式, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\rho}|(Du)_{B_\rho}(t)-(Du)_\rho|^p\mathrm{d}x\\
\leqslant&\ C\int_{-\rho^2}^{\rho^2}\mathrm{d}t\Big|\int_{B_\rho}\mathrm{d}x\int_{-\rho^2}^{\rho^2}[Du(x,t)-Du(x,s)]\mathrm{d}s\Big|^p\\
\leqslant&\ C\int_{-\rho^2}^{\rho^2}\mathrm{d}t\Big|\int_{\partial B_\rho}\mathrm{d}S_x\int_{-\rho^2}^{\rho^2}[u(x,t)-u(x,s)]\mathrm{d}s\Big|^p\\
\leqslant&\ C\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_{\partial B_\rho}|D_tu|^p\mathrm{d}S_x.
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

将其代入式 (5.4.5) 便得到, 对于 $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$I_\rho \leqslant C\int_{Q_1}|D^2u|^p\mathrm{d}x + C\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_{\partial B_\rho}|D_tu|^p\mathrm{d}S_x$$

上式两边关于 $\rho$ 从 1/2 到 1 积分, 得

$$\int_{1/2}^{1} I_\rho\mathrm{d}\rho \leqslant C\int_{Q_1}|D^2u|^p\mathrm{d}x + C\int_{Q_1}|D_tu|^p\mathrm{d}x \leqslant C|u|^p_{W_p^{2,1}(Q_1)}. \tag{5.4.7}$$

当 $\rho \geqslant 1/2$ 时, 应用不等式 (5.4.1),

$$I_\rho \geqslant \int_{Q_{1/2}}|Du-(Du)_\rho|^p\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2^p}\int_{Q_{1/2}}|Du-(Du)_{1/2}|^p\mathrm{d}x$$

此式结合式 (5.4.7), 便有

$$\int_{Q_{1/2}}|Du-(Du)_{1/2}|^p\mathrm{d}x \leqslant C|u|^p_{W_p^{2,1}(Q_1)}$$

不等式 (5.4.3) 得证.

第二步　证明不等式 (5.4.4). 仍然可以认为 $r=1$. 同上可以推出, 对于 $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} J_\rho &= \int_{Q_\rho}|u - x\cdot(Du)_\rho - u_\rho|^p\mathrm{d}x \\ &\leqslant 3^p\int_{Q_\rho}|u - x\cdot(Du)_{B_\rho}(t) - u_{B_\rho}(t)|^p\mathrm{d}x \\ &\quad +3^p\int_{Q_\rho}|(Du)_{B_\rho}(t) - (Du)_\rho|^p\mathrm{d}x + 3^p\int_{Q_\rho}|u_{B_\rho}(t)-u_\rho|^p\mathrm{d}x \\ &:= S_1+S_2+S_3. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

因为 $\int_{B_\rho} x\cdot(Du)_{B_\rho}(t)\mathrm{d}x = 0$, 先对函数 $u - x\cdot(Du)_{B_\rho}(t)$, 再对函数 $Du-(Du)_{B_\rho}(t)$ 应用 $W_p^1(B_\rho)$ 上的 Poincaré 不等式, 得

$$S_1 \leqslant C\int_{Q_\rho}|Du-(Du)_{B_\rho}(t)|^p\mathrm{d}x \leqslant C\int_{Q_\rho}|D^2u|^p\mathrm{d}x$$

显然, 对于 $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$S_3 \leqslant C\int_{-\rho^2}^{\rho^2}\mathrm{d}t\left|\int_{B_\rho}\mathrm{d}x\int_{-\rho^2}^{\rho^2}|u(x,t)-u(x,s)|\mathrm{d}s\right|^p \leqslant C\int_{Q_1}|D_tu|^p\mathrm{d}x$$

式 (5.4.6) 给出了 $S_2$ 的估计. 把 $S_1$、$S_2$、$S_3$ 的估计代入不等式 (5.4.8) 可得

$$J_\rho \leqslant C[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_1)} + C\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_{\partial B_\rho}|D_t u|^p \mathrm{d}S_x.$$

上式两边关于 $\rho$ 在 $[1/2,3/4]$ 上积分, 得

$$\int_{1/2}^{3/4} J_\rho \mathrm{d}\rho \leqslant C[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_1)}.$$

当 $\rho\in[1/2,3/4]$ 时, 应用不等式 (5.4.1), 有

$$\begin{aligned}
J_\rho &\geqslant \int_{Q_{1/2}} |u - x\cdot(Du)_\rho - u_\rho|^p \mathrm{d}x\\
&\geqslant \frac{1}{2^p}\int_{Q_{1/2}} |u - x\cdot(Du)_\rho - u_{1/2}|^p \mathrm{d}x\\
&\geqslant \frac{1}{4^p}\int_{Q_{1/2}} |u - x\cdot(Du)_{1/2} - u_{1/2}|^p \mathrm{d}x - C\int_{Q_{1/2}}|(Du)_\rho - (Du)_{1/2}|^p \mathrm{d}x\\
&\geqslant \frac{1}{4^p}\int_{Q_{1/2}} |u - x\cdot(Du)_{1/2} - u_{1/2}|^p \mathrm{d}x - C\int_{Q_\rho}|Du - (Du)_\rho|^p \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

从不等式 (5.4.3) 的证明过程可以看出, 对于 $1/2\leqslant\rho\leqslant 3/4$, 也有

$$\int_{Q_\rho}|Du - (Du)_\rho|^p \mathrm{d}x \leqslant C[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_1)}.$$

综合以上估计, 最后得到

$$\int_{Q_{1/2}} |u - x\cdot(Du)_{1/2} - u_{1/2}|^p \mathrm{d}x \leqslant C[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_1)}.$$

定理得证.

## 5.5 嵌入定理

当 $p=2$ 时, 通常记 $H^{k,k/2}(Q_T)=W_2^{k,k/2}(Q_T)$. 我们首先研究 $H^{k,k/2}(Q_T)$ 的嵌入定理.

**定理 5.5.1**　设 $\partial\Omega\in C^k$, $u\in H^{k,k/2}(Q_T)$, 则对于 $0<\ell+2r=\mu<k$, 有

$$D_x^\ell D_t^r u\in H^{k-\mu,(k-\mu)/2}(Q_T),$$

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{H^{k-\mu,(k-\mu)/2}(Q_T)}\leqslant C\|u\|_{H^{k,k/2}(Q_T)}, \tag{5.5.1}$$

这里的常数 $C$ 只依赖于 $n,k,d^{-1},T^{-1}$ 和 $\partial\Omega$. 如果 $k-\mu$ 是偶数, 或者 $k-\mu$ 与 $k$ 皆为奇数, 那么上面的结论对于 $u\in W_p^{k,k/2}(Q_T)$ $(p\neq 2)$ 也成立.

为证该定理, 我们先证明一个引理.

**引理 5.5.1**　记 $Q=\Omega\times\mathbb{R}$. 设 $g\in L^2(Q)$, 并且 $g$ 关于 $t$ 有紧支集. 如果

$$\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|s|\,|\widehat{g}(x,s)|^2\mathrm{d}s<\infty,$$

那么

$$[g]^2_{L^{1/2}_{2,t}(Q)}=C\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|s|\,|\widehat{g}(x,s)|^2\mathrm{d}s, \tag{5.5.2}$$

这里的 $C=4\int_0^\infty\frac{1-\cos h}{h^2}\mathrm{d}h$, $\widehat{g}(x,s)$ 是 $g(x,t)$ 关于时间 $t$ 的 Fourier 变换, 即

$$\widehat{g}(x,s)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ist}g(x,t)\mathrm{d}t.$$

**证明**　由式 (5.2.2) 知

$$[g]^2_{L^{1/2}_{2,t}(Q)}=2\int_\Omega \mathrm{d}x\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{|g(x,t+h)-g(x,t)|^2}{h^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}h,$$

再应用 Parseval 等式以及 Fourier 变换的位移性质得

$$\begin{aligned}
[g]^2_{L^{1/2}_{2,t}(Q)}&=2\int_\Omega \mathrm{d}x\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{|e^{ihs}\widehat{g}(x,s)-\widehat{g}(x,s)|^2}{h^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}h\\
&=4\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty\frac{1-\cos hs}{h^2}|\widehat{g}(x,s)|^2\mathrm{d}h\mathrm{d}s\\
&=4\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty\frac{1-\cos h}{h^2}|s|\,|\widehat{g}(x,s)|^2\mathrm{d}h\mathrm{d}s\\
&=4\int_0^\infty\frac{1-\cos h}{h^2}\mathrm{d}h\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|s|\,|\widehat{g}(x,s)|^2\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

因为积分 $\int_0^\infty \frac{1-\cos h}{h^2}\mathrm{d}h$ 收敛，故式 (5.5.2) 成立．证毕．

**定理 5.5.1 的证明** 由定理的条件知，$k \geqslant 2$．当 $k-\mu$ 为偶数时，按照范数的定义有

$$
\begin{aligned}
\|D_x^\ell D_t^r u\|^p_{W_p^{k-\mu,\frac{k-\mu}{2}}(Q_T)} &= \sum_{\rho+2\sigma\leqslant k-\mu} \|D_t^\sigma D_x^\rho(D_x^\ell D_t^r u)\|^p_{p,Q_T} \\
&= \sum_{\rho+2\sigma\leqslant k-\mu} \|D_t^{\sigma+r} D_x^{\rho+\ell} u\|^p_{p,Q_T} \\
&\leqslant \|u\|^p_{W_p^{k,\frac{k}{2}}(Q_T)},
\end{aligned}
$$

故式 (5.5.1) 成立．当 $k-\mu$ 与 $k$ 同为奇数时，由于

$$
\sum_{\rho+2\sigma=k-\mu-1} [D_t^{\sigma+r} D_x^{\rho+\ell} u]^p_{L_{p,t}^{1/2}(Q_T)} \leqslant \|u\|^p_{W_p^{k,k/2}(Q_T)},
$$

根据范数的定义知式 (5.5.1) 成立．

再讨论 $k-\mu$ 为奇数，$k$ 为偶数的情况 (由定理的条件知，$p=2$)．那么 $\mu$ 是奇数，故 $\ell \geqslant 1$．由逼近定理 5.3.1，不妨认为 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$．容易看出，证明不等式 (5.5.1) 可归结为估计

$$
\sum_{\rho+2\sigma=k-\mu-1} [D_t^{\sigma+r} D_x^{\rho+\ell} u]^2_{L_{2,t}^{1/2}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|u\|^2_{H^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{5.5.3}
$$

记 $g = D_t^{\sigma+r} D_x^{\rho+\ell-1} u$．注意到

$$
2(\sigma+r)+\rho+\ell-1 \leqslant k-2,
$$

由范数的定义知

$$
\|D_x^2 g\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}} + \|D_t g\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}} \leqslant \|u\|_{H^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{5.5.4}
$$

对于 $D_t(D_x g) = D_x(D_t g)$，两边关于 $t$ 作 Fourier 变换，我们有

$$
\mathrm{i}sD_x\hat{g} = D_x(\widehat{D_t g}).
$$

上式两边同乘以 $\overline{D_x\hat{g}}$，然后关于 $x$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上积分得

$$
\mathrm{i}s\int_{\mathbb{R}^n} |D_x\hat{g}|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} D_x(\widehat{D_t g})\cdot\overline{D_x\hat{g}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D_t g}\,\overline{D_x^2\hat{g}}\,\mathrm{d}x.
$$

由此推出

$$\int_{\mathbb{R}^n}|s|\,|D_x\hat{g}|^2\mathrm{d}x \leqslant \|\widehat{D_tg}\|_{2,\mathbb{R}^n}\|D_x^2\hat{g}\|_{2,\mathbb{R}^n}.$$

上式两边关于 $s$ 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 应用 Schwarz 不等式、Parseval 等式以及式 (5.5.4), 再注意到 $D_x^2\hat{g}=\widehat{D_x^2g}$, 则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}|s|\,|D_x\hat{g}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s &\leqslant \|\widehat{D_tg}\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}}\|D_x^2\hat{g}\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}}\\ &= \|D_tg\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}}\|D_x^2g\|_{2,\mathbb{R}^{n+1}}\\ &\leqslant \|u\|^2_{H^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})}.\end{aligned}$$

再利用引理 5.5.1 就得到

$$[D_xg]^2_{L_{2,t}^{1/2}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|u\|^2_{H^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

即

$$\left[D_t^{r+r}D_x^{\rho+\ell}u\right]^2_{L_{2,t}^{1/2}(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|u\|^2_{H^{k,k/2}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

从而式 (5.5.3) 成立. 证毕

下面讨论 $W_p^{2,1}(Q_T)$ 的嵌入定理.

**定理 5.5.2**　设 $p\geqslant 1, n\geqslant 2, \partial\Omega\in C^2$.

(1) 当 $p<n+2$ 时, 对于 $q=p(n+2)/(n+2-p)$, 有

$$\|Du\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \quad \forall\, u\in W_p^{2,1}(Q_T). \tag{5.5.5}$$

(2) 当 $p<(n+2)/2$ 时, 对于 $\bar{q}=p(n+2)/(n+2-2p)$, 有

$$\|u\|_{L^{\bar{q}}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \quad \forall\, u\in W_p^{2,1}(Q_T). \tag{5.5.6}$$

这里的 $C=C(n,p,d^{-1},T^{-1},\partial\Omega)$.

**证明**　设 $u\in W_p^{2,1}(Q_T)$. 根据逼近定理 5.3.2, 我们可以用 $C_0^\infty(\Omega_d\times(-T,2T))$ 中的函数来逼近 $u$ ($\Omega_d$ 的定义见定理 5.3.1). 因此, 不妨假设 $u\in C_0^\infty(Q_T)$.

第一步 考虑 $(n+2)/2 \leqslant p < n+2$ 的情况. 应用定理 2.11.4, 取

$$q = \frac{p(n+2)}{n+2-p},\quad \theta = \frac{p}{q},\quad k=1,\quad j=0,$$

由关系式 (2.11.1) 解出 $r = n(q-p)/p = np/(n+2-p)$. 这样, 利用不等式 (2.11.2) 得

$$\|Du(\cdot,t)\|_{q,\Omega}^{q} \leqslant C\|D^2u(\cdot,t)\|_{p,\Omega}^{p}\|Du(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{q-p}.$$

上式关于 $t$ 在 $[0,T]$ 上积分有

$$I = \int_{Q_T}|Du|^q\mathrm{d}x \leqslant C\sup_{(0,T)}\|Du(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{q-p}\int_{Q_T}|D^2u|^p\mathrm{d}x. \tag{5.5.7}$$

容易看出

$$\begin{aligned}
J &:= \sup_{(0,T)}\int_\Omega |Du(x,t)|^r\mathrm{d}x \\
&= \sup_{(0,T)}\int_\Omega\int_0^t D_t|Du(x,t)|^r\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \sup_{(0,T)} r\int_\Omega\int_0^t |Du(x,t)|^{r-2}\sum_{i=1}^n D_iuD_{it}u\mathrm{d}t\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

分部积分得

$$\begin{aligned}
J &= \sup_{(0,T)}\left(-r\int_\Omega\int_0^t D_tu\sum_{i=1}^n D_i\left(|Du(x,t)|^{r-2}D_iu\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant C\int_{Q_T}|D_tu|\cdot|D^2u|\cdot|Du|^{r-2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

注意到 $p \geqslant 2$, 利用 Hölder 不等式便推出

$$\begin{aligned}
J &\leqslant C\left(\int_{Q_T}|D_tu|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_T}|D^2u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_T}|Du|^{\frac{(r-2)p}{p-2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leqslant CI^{\frac{p-2}{p}}[u]^2_{W_p^{2,1}(Q_T)}.
\end{aligned}$$

将其代入式 (5.5.7) 得

$$I \leqslant CI^{\frac{(p-2)(q-p)}{pr}}[u]^{p+2\frac{q-p}{r}}_{W_p^{2,1}(Q_T)}.$$

由此可得不等式 (5.5.5).

第二步　考虑 $1 \leqslant p < (n+2)/2$ 的情况. 在定理 2.11.4 中分别取

$$k=2,\quad j=1,\quad q=\frac{p(n+2)}{n+2-p},\quad \theta=\frac{p}{q},\quad r=\frac{np}{n+2-2p},$$

$$k=2,\quad j=0,\quad \bar{q}=\frac{p(n+2)}{n+2-2p},\quad \theta=\frac{p}{\bar{q}},\quad r=\frac{np}{n+2-2p},$$

便可推出

$$\|Du(\cdot,t)\|_{q,\Omega}^{q} \leqslant C\|D^2u(\cdot,t)\|_{p,\Omega}^{p}\|u(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{q-p}, \tag{5.5.8}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{\bar{q},\Omega}^{\bar{q}} \leqslant C\|D^2u(\cdot,t)\|_{p,\Omega}^{p}\|u(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{\bar{q}-p}. \tag{5.5.9}$$

记

$$I_1=\int_{Q_T}|Du(x,t)|^q\mathrm{d}x,\quad J_1=\int_{Q_T}|u(x,t)|^{\bar{q}}\mathrm{d}x.$$

不等式 (5.5.8) 和 (5.5.9) 两边关于 $t$ 在 $[0,T]$ 上积分, 便有

$$I_1 \leqslant C\sup_{(0,T)}\|u(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{q-p}[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \tag{5.5.10}$$

$$J_1 \leqslant C\sup_{(0,T)}\|u(\cdot,t)\|_{r,\Omega}^{\bar{q}-p}[u]^p_{W_p^{2,1}(Q_T)}. \tag{5.5.11}$$

显然,

$$\int_\Omega|u(x,t)|^r\mathrm{d}x=\int_\Omega\int_0^t D_t|u(x,t)|^r\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leqslant r\int_{Q_T}|u|^{r-1}|D_tu(x,t)|\mathrm{d}x.$$

利用 Holder 不等式得

$$\begin{aligned}\sup_{(0,T)}\int_\Omega|u(x,t)|^r\mathrm{d}x &\leqslant r\left(\int_{Q_T}|D_tu|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_{Q_T}|u|^{\bar{q}}\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\\ &\leqslant rJ_1^{(p-1)/p}[u]_{W_p^{2,1}(Q_T)}.\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

将其代入式 (5.5.11), 便得

$$J_1 \leqslant CJ_1^{\frac{(p-1)(\bar{q}-p)}{rp}}[u]^{p+(\bar{q}-p)/r}_{W_p^{2,1}(Q_T)}.$$

注意到

$$\frac{(p-1)(\bar{q}-p)}{rp}=\frac{2(p-1)}{n}<1,$$

即得

$$J_1 \leqslant C[u]^{\bar q}_{W_p^{2,1}(Q_T)} \tag{5.5.13}$$

从而式 (5.5.6) 成立

把式 (5.5.13) 代入式 (5.5.12) 便推出

$$\sup_{(0,T)} \int_\Omega |u(x,t)|^r \mathrm{d}x \leqslant C[u]^{1+\bar q(p-1)/p}_{W_p^{2,1}(Q_T)} = C[u]^r_{W_p^{2,1}(Q_T)}$$

再将其代入式 (5.5.10) 即得式 (5.5.5) 定理得证

现在把定理 5.5.2 推广到一般情况, 即 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 中的嵌入定理

**定理 5.5.3** *设 $k$ 为正整数, $p\geqslant 1$, $n\geqslant 2$, $\partial\Omega\in C^{2k}$, 则对于 $0\leqslant \ell+2r=\mu<2k$, 当 $p<(n+2)/(2k-\mu)$ 时, 存在正常数 $C=C(n,k,p,d^{-1},T^{-1},\partial\Omega)$, 使得*

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}, \quad \forall u\in W_p^{2k,k}(Q_T), \tag{5.5.14}$$

*其中 $q=p(n+2)/[n+2-(2k-\mu)p]$.*

**证明** 第一步 首先证明

(1) 如果 $p<\frac{n+2}{2k}$, $q=\frac{p(n+2)}{n+2-2kp}$, 则

$$\|u\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}, \quad \forall u\in W_p^{2k,k}(Q_T), \tag{5.5.15}$$

(2) 如果 $k\geqslant 2$, $p<\frac{n+2}{2(k-1)}$, $q^*=\frac{p(n+2)}{n+2-2(k-1)p}$, 则

$$\|u\|_{W_{q^*}^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}, \quad \forall u\in W_p^{2k,k}(Q_T) \tag{5.5.16}$$

我们用归纳法证明不等式 (5.5.15) 和 (5.5.16) 先证明不等式 (5.5.15) 当 $k=1$ 时 由定理 5.5.2 知不等式 (5.5.15) 成立 假设不等式 (5.5.15) 对于 $k\leqslant m$ 成立 现设 $k=m+1$, $p<(n+2)/[2(m+1)]$ 根据定理 5.5.1,

$$u, D_x^2 u, D_t u \in W_p^{2m,m}(Q_T).$$

因此对于 $q^* = p(n+2)/(n+2-2mp)$, 由归纳假设知

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,1}_{q^*}(Q_T)} &\leqslant C\left(\|u\|_{W_p^{2m,m}(Q_T)}+\|D_x^2u\|_{W_p^{2m,m}(Q_T)}+\|D_tu\|_{W_p^{2m,m}(Q_T)}\right)\\ &\leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}\end{aligned}\tag{5.5.17}$$

对于 $q = \frac{p(n+2)}{n+2-2(m+1)p} = \frac{q^*(n+2)}{n+2-2q^*}$, 应用定理 5.5.2 得

$$\|u\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W^{2,1}_{q^*}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

由此即得不等式 (5.5.15).

再证明不等式 (5.5.16). 当 $k=2$ 时, 由 $u \in W_p^{4,2}(Q_T)$ 和定理 5.5.1 知

$$u, D_x^2u, D_tu \in W_p^{2,1}(Q_T).$$

从而由定理 5.5.2 推出, 对于 $q^* = p(n+2)/(n+2-2p)$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,1}_{q^*}(Q_T)} &\leqslant C\left(\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}+\|D_x^2u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}+\|D_tu\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}\right)\\ &\leqslant C\|u\|_{W_p^{4,2}(Q_T)}.\end{aligned}$$

这说明不等式 (5.5.16) 对于 $k=2$ 成立. 假设不等式 (5.5.16) 对于 $2 \leqslant k \leqslant m$ 成立. 那么, 由不等式 (5.5.17) 知, 不等式 (5.5.16) 对于 $k=m+1$ 也成立.

第二步　利用不等式 (5.5.15) 和 (5.5.16) 证明不等式 (5.5.14). 设 $u \in W_p^{2k,k}(Q_T)$.

如果 $\ell + 2r = \mu$ 是偶数, 由定理 5.5.1 知,

$$D_x^\ell D_t^r u \in W_p^{2k-\mu,k-\mu/2}(Q_T).$$

对于 $q = p(n+2)/[n+2-(2k-\mu)p]$ 应用不等式 (5.5.15), 可得

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{q,Q_T} \leqslant C\|D_x^\ell D_t^r u\|_{W_p^{2k-\mu,k-\mu/2}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}.$$

如果 $\ell + 2r = \mu$ 是奇数, 则 $2k-(\mu-1)$ 是偶数, 并且 $2k-\mu \geqslant 1$, $\ell \geqslant 1$. 由定理 5.5.1 知,

$$D_t^r D_x^{\ell-1} u \in W_p^{2k-(\mu-1),k-\frac{\mu-1}{2}}(Q_T)\tag{5.5.18}$$

当 $2k-\mu=1$ 时, $W_p^{2k-(\mu-1),k-(\mu-1)/2}(Q_T)=W_p^{2,1}(Q_T)$, 并且

$$q=\frac{p(n+2)}{n+2-(2k-\mu)p}=\frac{p(n+2)}{n+2-p}.$$

应用不等式 (5.5.5) 知

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{q,Q_T}\leqslant C\|D_t^r D_x^{\ell-1}u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}.$$

当 $2k-\mu>1$ 时, 因为 $2k-\mu$ 是奇数, 故 $2k-\mu\geqslant 3$, $2k-(\mu-1)$ 是偶数且不小于 4. 把空间 $W_p^{2k-(\mu-1),k-\frac{\mu-1}{2}}(Q_T)$ 写成 $W_p^{2(k-\frac{\mu-1}{2}),k-\frac{\mu-1}{2}}(Q_T)$. 由 $p<(n+2)/(2k-\mu)$ 知 $p<\frac{n+2}{2(k-\frac{\mu-1}{2}-1)}$. 对于

$$q^*=\frac{p(n+2)}{n+2-(2k-\mu-1)p}=\frac{p(n+2)}{n+2-2(k-\frac{\mu-1}{2}-1)p},$$

利用事实 (5.5.18) 及不等式 (5.5.16), 有

$$\begin{aligned}\|D_t^r D_x^{\ell-1}u\|_{W_{q^*}^{2,1}(Q_T)}&\leqslant C\|D_t^r D_x^{\ell-1}u\|_{W_p^{2k-(\mu-1),k-(\mu-1)/2}(Q_T)}\\&\leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}.\end{aligned}\tag{5.5.19}$$

由已知条件 $p<(n+2)/(2k-\mu)$, 得 $q^*<n+2$. 直接计算知 $q=(n+2)q^*/(n+2-q^*)$. 先利用不等式 (5.5.5), 再利用不等式 (5.5.19), 便可推得

$$\|D_x^\ell D_t^r u\|_{q,Q_T}\leqslant C\|D_t^r D_x^{\ell-1}u\|_{W_{q^*}^{2,1}(Q_T)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)}.$$

定理得证.

下面的三个定理讨论空间 $W_p^{k,\frac{k}{2}}(Q_T)$ 到空间 $C_\delta^\alpha(\overline{Q}_T)$ 的嵌入.

**定理 5.5.4** 设 $u\in W_p^{1,\frac12}(Q_T)$, $\partial\Omega\in C^1$, 则当 $p>n+2$ 时, $u\in C_\delta^\alpha(\overline{Q}_T)$, 并且

$$|u|_{\alpha,Q_T}\leqslant C\|u\|_{W_p^{1,\frac12}(Q_T)},\tag{5.5.20}$$

其中 $\alpha=1-(n+2)/p$, $\delta=\delta(x,y)$ 是抛物距离, $C$ 只依赖于 $n,p,d^{-1}$, $T^{-1}$ 和 $\partial\Omega$.

**证明**　先利用延拓定理 5.3.1 把 $u$ 延拓到 $\Omega_d\times(-T,2T)$ 上. 记 $\theta=p/(n+2)$. 对于 $\rho\leqslant\min\{\sqrt{T},d\}$ 以及任意的 $x_0\in Q_T$, 应用定理 5.4.1, 我们有

$$\frac{1}{|Q_\rho^{x_0}|^{\theta}}\int_{Q_\rho^{x_0}}|u(x)-u_\rho^{x_0}|^p\mathrm{d}x\leqslant C\frac{\rho^p}{|Q_\rho^{x_0}|^{\theta}}\|u\|^p_{W_p^{1,\frac{1}{2}}(Q_\rho(x_0))},$$

其中

$$u_\rho^x=\fint_{Q_\rho^x}u(y)\mathrm{d}y.$$

再利用延拓定理知,

$$\frac{1}{|Q_\rho^{x_0}|^{\theta}}\int_{Q_\rho^{x_0}}|u(x)-u_\rho^{x_0}|^p\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|^p_{W_p^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)}.$$

这样, 由 Campanato 空间的定义知 $u\in\mathcal{L}^{p,\theta}(Q_T,\delta)$, 并且

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}(Q_T,\delta)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)}.$$

由于 $p>n+2$, 所以 $\theta>1$. 根据定理 4.3.4, 对于 $\alpha=1-(n+2)/p$, 有 $u\in C_\delta^{\alpha}(\bar{Q}_T)$, 并且 (5.5.20) 成立. 证毕.

**定理 5.5.5**　设 $p>(n+2)/2$, $u\in W_p^{2,1}(Q_T)$, $\partial\Omega\in C^2$. 则当 $\alpha=2-(n+2)/p$ 不是整数时, $u\in C_\delta^{\alpha}(\bar{Q}_T)$ 并且

$$|u|_{\alpha,Q_T}\leqslant C\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)},$$

其中常数 $C$ 只依赖于 $n,p,d^{-1},T^{-1},\partial\Omega$.

**证明**　这里不能直接利用 Campanato 空间的结果, 但是可以遵循定理 4.1.1 的证明思路.

先把 $u$ 延拓到 $\mathbb{R}^{n+1}$, 使其支集属于 $Q_T^*=\Omega_d\times(-T,2T)$. 对于 $0<\rho\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\min\{\sqrt{T},d\}$, 显然有

$$\begin{aligned}|u_\rho^x-u_r^x|^p\leqslant{}&3^p|u(y)-(Du)_\rho^x\cdot(y-x)-u_\rho^x|^p\\&+3^p|u(y)-(Du)_r^x\cdot(y-x)-u_r^x|^p\\&+3^p|(Du)_\rho^x-(Du)_r^x|^p|y-x|^p.\end{aligned}\tag{5.5.21}$$

容易计算

$$
\begin{aligned}
|(Du)^x_\rho - (Du)^x_r|^p &= \left|\fint_{Q^x_\rho}(Du(y) - (Du)^x_r)\,dy\right|^p \\
&\leqslant \fint_{Q^x_\rho}|Du(y) - (Du)^x_r|^p\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{|Q^x_\rho|}\int_{Q^x_r}|Du(y) - (Du)^x_r|^p\,dy.
\end{aligned}
$$

利用定理 5.4.3 的式 (5.4.3), 立即可得

$$|(Du)^x_\rho - (Du)^x_r|^p \leqslant C\rho^{-(n+2)}r^p\|u\|^p_{W^{2,1}_p(Q_T)}.$$

将其代入式 (5.5.21), 并取那里的 $y\in Q^x_\rho$, 两边再关于 $y$ 在 $Q^x_\rho$ 上积分, 应用定理 5.4.3 的式 (5.4.4), 我们有

$$|u^x_\rho - u^x_r| \leqslant C\rho^{-(n+2)/p}r^2\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}.$$

重复引理 4.1.4 和定理 4.1.1 的证明, 类似于式 (4.1.8) 可得

$$|u^x_\rho - \bar{u}(x)| \leqslant C\rho^\alpha\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}, \tag{5.5.22}$$

其中 $\alpha = 2-(n+2)/p$, $\bar{u} = u$ 在 $Q_T$ 上几乎处处成立.

对于 $x, y\in Q_T$, 取 $\rho = 2\delta(x,y)$, 利用式 (5.5.22),

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leqslant |u(x) - u^x_\rho| + |u(y) - u^y_\rho| + |u^x_\rho - u^y_\rho| \\
&\leqslant C\rho^\alpha\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)} + |u^x_\rho - u^y_\rho|.
\end{aligned}
\tag{5.5.23}
$$

显然有

$$
\begin{aligned}
|u^x_\rho - u^y_\rho|^p \leqslant{}& 4^p|z-x|^p|(Du)^x_\rho|^p + 4^p|z-y|^p|(Du)^y_\rho|^p \\
&+4^p|u(z) - (Du)^x_\rho\cdot(z-x) - u^x_\rho|^p \\
&+4^p|u(z) - (Du)^y_\rho\cdot(z-y) - u^y_\rho|^p.
\end{aligned}
\tag{5.5.24}
$$

(1) 当 $(n+2)/2 < p < n+2$ 时, 利用嵌入定理 5.5.2 的式 (5.5.5) 对于 $q = p(n+2)/(n+2-p)$, 有

$$\|Du\|_{L^q(Q_T^*)} \leqslant C\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T^*)} \leqslant C\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)},$$

由此得

$$|(Du)^{\boldsymbol{x}}_\rho| \leqslant \left(\fint_{Q^{\boldsymbol{x}}_\rho}|Du|^q \mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{1/q} \leqslant C\rho^{-(n+2)/q}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}.$$

同理可证, $|(Du)^{\boldsymbol{y}}_\rho| \leqslant C\rho^{-(n+2)/q}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}$. 对式 (5.5.24) 关于 $\boldsymbol{z}$ 在 $Q^{\boldsymbol{x}}_\rho\bigcap Q^{\boldsymbol{y}}_\rho$ 上积分, 同时应用定理 5.4.3 可得

$$|u^{\boldsymbol{x}}_\rho - u^{\boldsymbol{y}}_\rho|^p \leqslant C\rho^{2p-(n+2)}\|u\|^p_{W^{2,1}_p(Q_T)}.$$

将其代入式 (5.5.23), 则有

$$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \leqslant C\rho^{\alpha}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}.$$

(2) 当 $p > n+2$ 时, 首先利用定理 5.4.3 的式 (5.4.3), 类似于定理 5.5.4 的证明不难推出 $Du \in C^{1-(n+2)/p}_\delta(\overline{Q}_T)$ 并且

$$|Du|_{1-(n+2)/p,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}. \tag{5.5.25}$$

为完成定理的证明, 还需估计

$$|u|^t_{1-(n+2)/(2p),Q_T} \leqslant C\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}. \tag{5.5.26}$$

对于 $\boldsymbol{x} = (x,t)$, $\boldsymbol{y} = (x,s)$, 记 $\rho = \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |t-s|^{1/2}$, 代替式 (5.5.24), 我们有

$$\begin{aligned}|u^{\boldsymbol{x}}_\rho - u^{\boldsymbol{y}}_\rho|^p \leqslant\ & 4^p|z-x|^p|(Du)^{\boldsymbol{x}}_\rho - (Du)^{\boldsymbol{y}}_\rho|^p \\ & +4^p|u(\boldsymbol{z}) - (Du)^{\boldsymbol{x}}_\rho\cdot(z-x) - u^{\boldsymbol{x}}_\rho|^p \\ & +4^p|u(\boldsymbol{z}) - (Du)^{\boldsymbol{y}}_\rho\cdot(z-x) - u^{\boldsymbol{y}}_\rho|^p.\end{aligned} \tag{5.5.27}$$

应用式 (5.5.25) 可得 $|(Du)^{\boldsymbol{x}}_\rho - (Du)^{\boldsymbol{y}}_\rho|^p \leqslant C\rho^{p-(n+2)}\|u\|^p_{W^{2,1}_p(Q_T)}$. 将其代入式 (5.5.27), 再把所得结果关于 $\boldsymbol{z}$ 在 $Q^{\boldsymbol{x}}_\rho \cap Q^{\boldsymbol{y}}_\rho$ 上积分, 然后应用定理 5.4.3 的式 (5.4.4) 可得 $|u^{\boldsymbol{x}}_\rho - u^{\boldsymbol{y}}_\rho| \leqslant C\rho^{\alpha}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}$. 把它代入式 (5.5.23), 便推出

$$\begin{aligned}|u(x,t) - u(x,s)| = |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| &\leqslant C\rho^{\alpha}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)} \\ &= C|t-s|^{\alpha/2}\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}.\end{aligned}$$

故式 (5.5.26) 成立. 证毕

**定理 5.5.6** 设 $k$ 为正整数, $u\in W_p^{2k,k}(Q_T)$, $\partial\Omega\in C^{2k}$. 则对于 $0\leqslant \ell+2r=\eta<2k$, 如果 $p>(n+2)/(2k-\eta)$ 并且 $(n+2)/p$ 不是整数, 就有

$$D_x^\ell D_t^r u\in C_\delta^\alpha(\bar{Q}_T),\quad \alpha=2k-\eta-(n+2)/p,$$

$$|D_x^\ell D_t^r u|_{\alpha,Q_T}\leqslant C\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)},$$

其中常数 $C$ 只依赖于 $n,k,p,d^{-1},T^{-1}$ 和 $\partial\Omega$. 而当 $(n+2)/p$ 是整数时, 上述结论对 $\alpha<2k-\eta-(n+2)/p$ 也成立.

**证明** 用归纳法. 假设结论对于 $k\leqslant m$ 成立, 要证对于 $k=m+1$ 也成立. 设

$$u\in W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T),\quad \alpha=2(m+1)-\eta-\frac{n+2}{p},\quad p>\frac{n+2}{2(m+1)-\eta}.$$

在定理 5.5.1 中取 $k=2(m+1)$, $\mu=2$, 则有

$$u,\ D_x^2u,\ D_tu\in W_p^{2m,m}(Q_T).\tag{5.5.28}$$

记 $v=D_x^\ell D_t^r u$.

第一步 先考虑 $\eta<2m$ 的情况.

(1) 当 $2m-\eta-(n+2)/p<0$, 即 $p<(n+2)/(2m-\eta)$ 时, 在嵌入定理 5.5.3 中取 $k=m+1$, $\mu=\eta+2$, 那么对于

$$q=\frac{p(n+2)}{n+2-[2(m+1)-(\eta+2)]p}=\frac{p(n+2)}{n+2-(2m-\eta)p},\tag{5.5.29}$$

我们有

$$\|D_tv,D_x^2v\|_{q,Q_T}\leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.\tag{5.5.30}$$

在内插不等式 (定理 5.3.3) 中取 $r=0$, $\ell=1$, $k=2$, $p=q$, 则

$$\|D_xv\|_{q,Q_T}\leqslant C\left([v]_{W_q^{2,1}(Q_T)}+\|v\|_{q,Q_T}\right).\tag{5.5.31}$$

由半模的定义以及式 (5.5.30) 得

$$[v]_{W_q^{2,1}(Q_T)} = \|D_t v\|_{q,Q_T} + \|D_x^2 v\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}. \tag{5.5.32}$$

在嵌入定理 5.5.3 中取 $k = m$, $\mu = \eta$, 那么对于式 (5.5.29) 给出的 $q$, 有

$$\|v\|_{q,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2m,m}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}. \tag{5.5.33}$$

结合式 (5.5.30) ~ (5.5.33), 就推出

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

由于

$$\alpha = 2(m+1) - \eta - \frac{n+2}{p} = 2 - \frac{n+2}{q} > 0,$$

并且 $\frac{n+2}{q} = \frac{n+2}{p} - 2m + \eta$ 不是整数, 利用定理 5.5.5 知

$$|v|_{\alpha,Q_T} \leqslant C\|v\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

(2) 当 $\beta = 2m - \eta - (n+2)/p > 0$ 时, 由式 (5.5.28) 和归纳假设得

$$\begin{aligned}
&|v|_{\beta,Q_T} + |D_x^2 v|_{\beta,Q_T} + |D_t v|_{\beta,Q_T} \\
&= |D_x^\ell D_t^r u|_{\beta,Q_T} + |D_x^\ell D_t^r (D_x^2 u)|_{\beta,Q_T} + |D_x^\ell D_t^r (D_t u)|_{\beta,Q_T} \\
&\leqslant C\|u\|_{W_p^{2m,m}(Q_T)} \\
&\leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.
\end{aligned}$$

由此推出

$$|v|_{\alpha,Q_T} = |v|_{2+\beta,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

**第二步** 考虑 $\eta = 2m$ 的情况. 在定理 5.5.1 中取 $k = 2(m+1)$, $\mu = \eta = 2m$, 则有

$$v \in W_p^{2,1}(Q_T), \quad \|v\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

因为 $\alpha = 2 - (n+2)/p$ 不是整数, 应用定理 5.5.5 知

$$|v|_{\alpha,Q_T} \leqslant C\|v\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

第三步 考虑 $\eta = 2m+1$ 的情况. 此时 $\ell$ 一定是奇数. 记 $w = D_t^r D_x^{\ell-1}u$, 那么 $v = D_x w$ 并且 $\eta_0 = \ell - 1 + 2r = 2m$. 由于

$$p > \frac{n+2}{2(m+1)-\eta} = \frac{n+2}{2(m+1)-(2m+1)} = n+2 > \frac{n+2}{2} = \frac{n+2}{2(m+1)-\eta_0},$$

若记 $\alpha_0 = 2 - (n+2)/p = 2(m+1) - \eta_0 - (n+2)/p$, 利用第二步的结论便知

$$|w|_{\alpha_0,Q_T} \leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.$$

又因为 $\alpha_0 = 1 + \alpha$, 按照范数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
|v|_{\alpha,Q_T} &= \|v\|_{L^\infty(Q_T)} + [v]_{\alpha,Q_T} \\
&\leqslant \|v\|_{L^\infty(Q_T)} + [v]_{\alpha,Q_T} + [w]^t_{(1+\alpha)/2,Q_T} \\
&= \|D_x w\|_{L^\infty(Q_T)} + [D_x w]_{\alpha,Q_T} + [w]^t_{(1+\alpha)/2,Q_T} \\
&= \|D_x w\|_{L^\infty(Q_T)} + [w]_{1+\alpha,Q_T} \\
&\leqslant |w|_{1+\alpha,Q_T} = |w|_{\alpha_0,Q_T} \\
&\leqslant C\|u\|_{W_p^{2(m+1),m+1}(Q_T)}.
\end{aligned}$$

定理得证.

在定理 5.5.5 和定理 5.5.6 中, 如果 $\alpha = m + \gamma$, $m$ 是正整数, $0 \leqslant \gamma < 1$, 那么范数 $|\cdot|_{\alpha,Q_T}$ 就理解为 $|\cdot|_{m+\gamma,Q_T}$.

## 5.6 空间 $V_2(Q_T)$ 和 $V_2^{1,0}(Q_T)$

在抛物型方程的研究中, 经常用到两类重要的空间 $V_2$ 和 $V_2^{1,0}$.

**定义 5.6.1**　用 $V_2(Q_T)$ 表示集合 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\bigcap L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ 赋予范数

$$\|u\|_{V_2(Q_T)}=\sup_{0<t<T}\|u(\cdot,t)\|_{2,\Omega}+\|Du\|_{2,Q_T}$$

后得到的空间. 再定义 $V_2(Q_T)$ 的一个子空间

$$V_2^{1,0}(Q_T)=C([0,T];L^2(\Omega))\bigcap L^2(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{2,\Omega}+\|Du\|_{2,Q_T}.$$

易证 $V_2(Q_T)$ 和 $V_2^{1,0}(Q_T)$ 都是 Banach 空间. 因为 $W_2^1(Q_T)$ 在范数 $\|\cdot\|_{V_2(Q_T)}$ 下的完备化空间就是 $V_2^{1,0}(Q_T)$, 所以

$$W_2^1(Q_T)\hookrightarrow V_2^{1,0}(Q_T)\hookrightarrow V_2(Q_T).$$

**定义 5.6.2**　分别用 $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ 和 $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ 表示 $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 在 $V_2(Q_T)$ 和 $V_2^{1,0}(Q_T)$ 中的闭包.

设 $j$ 是常数. 定义 $u^{(j)}(x,t)=\max\{u(x,t)-j,0\}$, 称之为水平函数.

**性质 5.6.1**　若 $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, 则 $u^{(j)}(x,t)\in V_2^{1,0}(Q_T)$.

**证明**　容易验证 $u^{(j)}(x,t)\in V_2(Q_T)$. 再证明 $u^{(j)}(x,t)$ 在 $L^2(\Omega)$ 范数下关于 $t$ 连续. 注意到 $|u^{(j)}(x,t)-v^{(j)}(x,t)|\leqslant|u-v|$, 因此当 $h\longrightarrow 0^+$ 时,

$$\|u^{(j)}(\cdot,t+h)-u^{(j)}(\cdot,t)\|_{2,\Omega}\leqslant\|u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)\|_{2,\Omega}\longrightarrow 0.$$

结论成立.

**性质 5.6.2**　如果在 $V_2^{1,0}(Q_T)$ 中 $u_\ell\to u$, 那么在 $V_2^{1,0}(Q_T)$ 中

$$u_\ell^{(j)}(x,t)\longrightarrow u^{(j)}(x,t).$$

证明留作习题 (提示: 利用定理 2.5.6).

**定义 5.6.3** 假设对于任意的 $x\in\Omega$, $u(x,t)$ 关于 $t$ 在 $(0,T)$ 上可积. 对于 $h<T$, 称函数

$$u_h(x,t)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(x,s)\mathrm{d}s$$

为 $u$ 关于 $t$ 的Steklov 平均. 它具有 "磨光" 作用.

**性质 5.6.3** 假设 $u\in L^{p,q}(Q_T)$, $1\leqslant p,q<\infty$, $\delta>0$, 则对于任意的 $h\in(0,\delta)$ 有 $u_h\in L^{p,q}(Q_{T-\delta})$ 并且当 $h\longrightarrow 0$ 时, 在 $L^{p,q}(Q_{T-\delta})$ 中 $u_h\longrightarrow u$.

**证明** 由于

$$u_h(\cdot,t)-u(\cdot,t)=\frac{1}{h}\int_0^h[u(\cdot,t+s)-u(\cdot,t)]\mathrm{d}s,$$

所以 (见习题 5.10)

$$\|u_h(x,t)-u(x,t)\|_{p,q,Q_{T-\delta}}\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\|u(\cdot,t+s)-u(\cdot,t)\|_{p,q,Q_{T-\delta}}\mathrm{d}s.$$

利用 $L^{p,q}(Q_{T-\delta})$ 函数的整体连续性知结论成立.

**性质 5.6.4** 设 $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, $0<\delta<T$, 则对于任意的 $h\in(0,\delta)$, 有 $u_h\in W_2^1(Q_{T-\delta})$ 并且当 $h\longrightarrow 0$ 时, 在 $V_2(Q_{T-\delta})$ 中 $u_h\longrightarrow u$.

**证明** 利用

$$D_tu_h=\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}\in V_2^{1,0}(Q_{T-\delta})$$

知, $u_h\in W_2^1(Q_{T-\delta})$. 由于 $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, 所以当 $h\longrightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned}\sup_{0<t<T-\delta}\|(u_h-u)(\cdot,t)\|_{2,\Omega}&\leqslant\sup_{0<t<T-\delta}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|_{2,\Omega}\mathrm{d}s\\&\leqslant\sup_{0<t<T-\delta}\ \sup_{t<s<t+h}\|u(\cdot,s)-u(\cdot,t)\|_{2,\Omega}\end{aligned}$$

收敛于零. 又因为

$$\|D_xu_h-D_xu\|_{2,Q_{T-\delta}}\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\|D_xu(x,t+s)-D_xu(x,t)\|_{2,Q_{T-\delta}}\mathrm{d}s,$$

根据 $L^2(Q_T)$ 函数的整体连续性知, 当 $h \to 0$ 时上式右端也趋于 0. 证毕.

用 $\mathring{W}_p^1(Q_T)$ 表示 $\mathring{C}^\infty(\bar{Q}_T)$ 在 $W_p^1(Q_T)$ 中的闭包. 下面的定理显然成立.

**定理 5.6.1** 假设 $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $0 < \delta < T$, $\sup\limits_{\partial\Omega\times(0,T)} u(x,t) \leqslant j_0$, 则对任意的 $h \in (0,\delta)$ 和 $j \geqslant j_0$, 有 $u_h^{(j)} \in \mathring{W}^1_2(Q_{T-\delta})$.

**定理 5.6.2** 设 $r, q \geqslant 2$ 且满足 $1/r + n/(2q) = n/4$, 那么 $\mathring{V}_2(Q_T) \hookrightarrow L^{q,r}(Q_T)$, 同时还有

$$\|u\|_{q,r,Q_T} \leqslant C\|Du\|^{1-\theta}_{2,Q_T} \sup_{0<t<T}\|u(\cdot,t)\|^{\theta}_{2,\Omega}, \quad \forall u \in \mathring{V}_2(Q_T), \quad (5.6.1)$$

其中 $\theta = n/2 - n/q$.

特别地, $r$ 和 $q$ 的取值范围可如下确定:

(1) 当 $n \geqslant 3$ 时, $r \in [2,\infty]$, $q \in [2, 2n/(n-2)]$;

(2) 当 $n = 2$ 时, $r \in (2,\infty]$, $q \in [2,\infty)$;

(3) 当 $n = 1$ 时, $r \in [4,\infty]$, $q \in [2,\infty]$.

**证明** 首先, 由定理 2.11.4 知,

$$\|u(\cdot,t)\|_{q,\Omega} \leqslant C\|Du(\cdot,t)\|^{\theta}_{2,\Omega}\|u(\cdot,t)\|^{1-\theta}_{2,\Omega}.$$

从而

$$\begin{aligned}\|u\|_{q,r,Q_T} &= \left(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^r_{q,\Omega}\mathrm{d}t\right)^{1/r}\\ &\leqslant C\left(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^{r(1-\theta)}_{2,\Omega}\|Du(\cdot,t)\|^{r\theta}_{2,\Omega}\mathrm{d}t\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

由于 $q, r$ 满足 $1/r + n/(2q) = n/4$, 所以 $r\theta = 2$. 因而式 (5.6.1) 成立. 证毕.

下面讨论空间 $V_2(Q_T)$. 假设 $\partial\Omega\in C^1$. 当 $u\in V_2(Q_T)$ 时, 对函数 $u(x,t)-u_\Omega(t)$ 利用定理 2.11.4 得,

$$\|u(\cdot,t)-u_\Omega(t)\|_{q,\Omega}\leqslant C\|Du(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{\theta}\|u(\cdot,t)-u_\Omega(t)\|_{2,\Omega}^{1-\theta},$$

这里 $u_\Omega(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x$. 同于定理 5.6.2 的证明, 有

$$\begin{aligned}\|u-u_\Omega(t)\|_{q,r,Q_T}&\leqslant C\sup_{0<t<T}\|u-u_\Omega(t)\|_{2,\Omega}^{1-\theta}\|Du\|_{2,Q_T}^{\theta}\\&\leqslant C\|u-u_\Omega(t)\|_{V_2(Q_T)},\quad\forall\, u\in V_2(Q_T).\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}\|u\|_{q,r,Q_T}&\leqslant\|u-u_\Omega(t)\|_{q,r,Q_T}+\|u_\Omega(t)\|_{q,r,Q_T}\\&\leqslant\|u-u_\Omega(t)\|_{q,r,Q_T}+|\Omega|^{1/q}T^{1/r}\sup_{0<t<T}|u_\Omega(t)|,\\\|u-u_\Omega(t)\|_{V_2(Q_T)}&\leqslant\|u\|_{V_2(Q_T)}+\|u_\Omega(t)\|_{V_2(Q_T)}\\&=\|u\|_{V_2(Q_T)}+|\Omega|^{1/2}\sup_{0<t<T}|u_\Omega(t)|,\\\sup_{0<t<T}|u_\Omega(t)|&\leqslant|\Omega|^{-1/2}\sup_{0<t<T}\|u\|_{2,\Omega}\leqslant|\Omega|^{-1/2}\|u\|_{V_2(Q_T)}.\end{aligned}$$

综合以上估计, 我们有下面的定理

**定理 5.6.3** 假设 $r,q$ 满足定理 5.6.2 的参数关系, $\partial\Omega\in C^1$, 那么 $V_2(Q_T)\hookrightarrow L^{q,r}(Q_T)$, 并且

$$\|u\|_{q,r,Q_T}\leqslant C\|u\|_{V_2(Q_T)},\quad\forall\, u\in V_2(Q_T).$$

下面讨论 $u(x,t)$ 关于空间变量 $x$ 磨光后的性质. 对于 $\varepsilon>0$, 我们用 $u_\varepsilon(x,t)$ 表示 $u(x,t)$ 关于空间变量 $x$ 的磨光: $u_\varepsilon(x,t)=\eta_\varepsilon(\cdot)*u(\cdot,t)$.

**定理 5.6.4** 假设 $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, 则对任意的 $\Omega'\Subset\Omega$, 当 $0<\varepsilon<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ 时, $u_\varepsilon(x,t)$ 在 $\overline{Q_T'}$ 上连续, 关于 $x$ 无穷次连续可微. 同时当 $\varepsilon\longrightarrow0^+$ 时,

$$\|u_\varepsilon-u\|_{V_2^{1,0}(Q_T')}\longrightarrow0,$$

这里的 $Q'_T=\Omega'\times(0,T]$. 此外, 若 $u\in L^{p,q}(Q_T)$, 那么当 $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ 时, 在空间 $L^{p,q}(Q_T)$ 中 $u_\varepsilon(x,t)\longrightarrow u(x,t)$.

**证明**　$u_\varepsilon(x,t)$ 在 $Q'_T$ 上关于 $x$ 无穷次可微以及定理最后一个结论的证明同于 1.5 节. 下面证明其余结论. 假设 $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$.

先证明 $u_\varepsilon(x,t)$ 和 $D_x^\alpha u_\varepsilon(x,t)$ 的连续性. 对于任意固定的 $\varepsilon>0$, 当 $(x,t),(y,s)\in\overline{Q'_T}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&|u_\varepsilon(x,t)-u_\varepsilon(y,s)|\\
=&\frac{1}{\varepsilon^n}\left|\int_{B_\varepsilon(x)}\eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)u(z,t)\mathrm{d}z-\int_{B_\varepsilon(y)}\eta\left(\frac{y-z}{\varepsilon}\right)u(z,s)\mathrm{d}z\right|\\
\leqslant&\frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\left|\eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{y-z}{\varepsilon}\right)\right||u(z,t)|\mathrm{d}z\\
&+\frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\eta\left(\frac{y-z}{\varepsilon}\right)|u(z,t)-u(z,s)|\mathrm{d}z
\end{aligned}\tag{5.6.2}$$

利用 $\eta$ 的连续性知, 当 $x\longrightarrow y$ 时, 上式右端的第一项趋于零. 再利用

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\eta\left(\frac{y-z}{\varepsilon}\right)|u(z,t)-u(z,s)|\mathrm{d}z\leqslant C(\varepsilon)\|u(\cdot,t)-u(\cdot,s)\|_{2,\Omega}$$

知, 当 $t\longrightarrow s$ 时, 式 (5.6.2) 右端的第二项也趋于零.

这样就证明了 $u_\varepsilon(x,t)$ 的连续性. 同理可证 $D_x^\alpha u_\varepsilon(x,t)$ 的连续性.

再证明当 $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ 时, 在 $V_2^{1,0}(Q'_T)$ 中 $u_\varepsilon\longrightarrow u$. 为此, 只需证明当 $|\xi|\longrightarrow 0$ 时, 在 $V_2^{1,0}(Q'_T)$ 中 $u(x+\xi,t)$ 收敛于 $u(x,t)$. 因为 $Du\in L^2(Q_T)$, 利用 $L^2$ 函数的整体连续性知, $\|Du(\cdot,t)-Du(\cdot+\xi,t)\|_{2,Q'_T}\longrightarrow 0$. 下面证明当 $|\xi|\longrightarrow 0$ 时,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)-u(\cdot+\xi,t)\|_{2,\Omega'}\longrightarrow 0.$$

因为 $u(\cdot,t)$ 作为 $L^2(\Omega)$ 中的元素关于 $t$ 在 $[0,T]$ 上连续, 故一致连续. 对于任给的 $\delta>0$, 存在 $\sigma>0$, 当 $t,s\in[0,T]$, $|t-s|<\sigma$ 时, 有

$$\|u(\cdot,t)-u(\cdot,s)\|_{2,\Omega'}<\delta.$$

把 $[0,T]$ 分解成 $[0,T]=\bigcup_{j=1}^{N}[t_{j-1},t_j]$, $t_j-t_{j-1}<\sigma$, 那么

$$\max_j \max_{t\in[t_{j-1},t_j]} \|u(\cdot,t)-u(\cdot,t_j)\|_{2,\Omega'}<\delta. \tag{5.6.3}$$

根据 $L^2$ 函数的整体连续性又知, 当 $|\xi|\ll 1$ 时,

$$\max_j \|u(\cdot,t_j)-u(\cdot+\xi,t_j)\|_{2,\Omega'}<\delta.$$

此式结合不等式 (5.6.3) 知, 当 $|\xi|\ll 1$ 时,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\cdot,t)-u(\cdot+\xi,t)\|_{2,\Omega'}<3\delta.$$

定理得证.

## 习题

**5.1** 证明定理 5.1.1.

**5.2** 设 $\Omega$ 有界, $T>0$, $Q_T=\Omega\times(0,T]$. 又设 $1\leqslant p,q<\infty$, $0<\alpha<1$, $k$ 是正整数. 证明下列函数空间都是 Banach 空间:

(1) $C^{k+\alpha,k+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$;

(2) $L^{p,q}(Q_T)$;

(3) $W_p^{k,k/2}(Q_T)$.

**5.3** 证明式 (5.2.2).

**5.4** 设 $\Omega$ 有界, $T>0$, $1\leqslant p<n$, $v\in L^1(Q_T)$, $w\in \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(Q_T)$. 证明

$$\int_0^T\int_\Omega |v|^{p/n}|w|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\left(\sup_{(0,T)}\int_\Omega |v|\mathrm{d}x\right)^{p/n}\int_0^T\int_\Omega |Dw|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

**5.5** 给出定理 5.3.2 的详细证明.

**5.6** 证明不等式 (5.3.9).

**5.7** 证明定理 5.4.2.

**5.8** 证明不等式 (5.4.1) 和 (5.4.2).

**5.9** 证明性质 5.6.2.

**5.10** 假设对于每一个 $t\in(a,b)$, $f(\cdot,t)\in L^p(\Omega)$, 并且积分 $\int_a^b f(\cdot,t)\mathrm{d}t\in L^p(\Omega)$ 试证明

$$\left\|\int_a^b f(\cdot,t)\mathrm{d}t\right\|_{p,\Omega}\leqslant\int_a^b\|f(\cdot,t)\|_{p,\Omega}\mathrm{d}t.$$

**5.11** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, $T>0$. 又设 $u\in W_2^{2,1}(Q_T)$ 且对于 $0\leqslant\theta\leqslant1$, 有 $D_x^2u, D_tu\in\mathcal{L}^{2,\theta}(Q_T,\delta)$ 试证明 $D_xu\in\mathcal{L}^{2,\theta+\frac{2}{n+2}}(Q_T,\delta)$

# 附录　实变函数与泛函分析中的一些基本结论

在这个附录中，我们罗列本书中用到的实变函数与泛函分析若干基本结论。除去标明参考文献的结论之外，其余结论都可以在文献 [1, 13] 中找到。

**定理 A.1 (Lebesgue 微分定理)**　假设对于每一个 $x\in\mathbb{R}^n$，都存在一组 Borel 集 $\{E_i(x)\}$ 良好地收缩到 $x$。如果 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，那么等式

$$\lim_{i\to\infty}\fint_{E_i(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处成立。

特别地，如果 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$，那么对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\lim_{r\to 0}\fint_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|^p\mathrm{d}y=0,$$

其中 $B_r(x)$ 表示以 $x$ 为心、以 $r$ 为半径的球。

**定理 A.2**　设 $X$ 是 Banach 空间，它的子空间 $M$ 关于 $X$ 上的范数拓扑是闭的，那么在 $X$ 的范数下 $M$ 也是一个 Banach 空间，而且

(a) 如果 $X$ 是可分的，则 $M$ 是可分的；

(b) 如果 $X$ 是自反的，则 $M$ 是自反的，

(c) 如果 $X$ 是一致凸的，则 $M$ 是一致凸的

**定理 A.3 (Stone-Weierstrass 定理)** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$M$ 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集 如果 $M$ 具有下面的三个性质

(a) 若 $f,g\in M$, $c\in\mathbb{R}$, 则 $f+g, fg, cf\in M$;

(b) 若 $x,y\in\Omega$, $x\neq y$, 则存在 $f\in M$, 使得 $f(x)\neq f(y)$,

(c) 若 $x\in\overline{\Omega}$, 则存在 $f\in M$ 使得 $f(x)\neq 0$,

那么 $M$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中稠密

**推论 A.4** 如果 $\Omega$ 有界，那么有理系数多项式构成的集合 $P$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中稠密

**定理 A.5 (Arzelà-Ascoli 定理)** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集，$M$ 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集. 如果 $M$ 是一致有界和等度连续的，那么它在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧的

**一致有界** 存在正常数 $C$ 使得 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|\leqslant C$ 对所有 $f\in M$ 成立

**等度连续** 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 $x,y\in\overline{\Omega}$ 和所有 $f\in M$, 都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

**定理 A.6** 给定一个定义在 $\Omega$ 上的实值函数 $f$ 则存在一个在 $\Omega$ 上点点收敛于 $f$ 的简单函数列 $\{s_k\}$ 如果 $f$ 是可测的，那么每个 $s_k$ 都可以取成可测函数 如果 $f$ 是非负的，可以选取这个简单函数列 $\{s_k\}$ 是非负的 使得在每一点 $x\in\Omega$ 处，数列 $\{s_k(x)\}$ 是单调增加的 如果 $f$ 是有界的，还可以选取一个一致收敛于 $f$ 的简单函数列 $\{s_k\}$

**定理 A.7 (Lusin 定理)** 设 $f$ 是一个可测函数，$A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个测度有限的可测集 如果 $f$ 在 $A$ 的余集 $A^c$ 上恒为零，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在函数 $g\in C_0(A)$, 使得

$$\sup_{x\in A}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in A}|f(x)|\qquad\left|\{x\in A\ f(x)\neq g(x)\}\right|<\varepsilon$$

需要说明的是，如果 $f \notin L^\infty(A)$，那么上式中第一个不等式的右端项是无穷大，这个不等式当然成立.

**定理 A.8** 设 $X$ 是一个 Banach 空间，$K$ 是 $X$ 中的集合，那么 $K$ 是准紧的当且仅当对于任给的 $\varepsilon > 0$，在 $X$ 中都存在 $K$ 的一个有限 $\varepsilon$-网，即存在 $x_1, \cdots, x_{m_\varepsilon} \in X$，使得对于每个 $x \in K$，都有一个 $x_i \in \{x_1, \cdots, x_{m_\varepsilon}\}$ 满足 $\|x_i - x\| < \varepsilon$.

**定理 A.9 ([12, 定理 2.2.1])** 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数，那么对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

这说明 Lipschitz 连续函数是几乎处处古典可微的.

# 参考文献


[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975 (中译本：叶其孝等译. 索伯列夫空间. 北京：人民教育出版社, 1981)

[2] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*, Second edition. Academic Press (Elsevier), 2003.

[3] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程. 北京：北京大学出版社, 2003.

[4] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京：科学出版社, 2003.

[5] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics vol.19. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2010.

[6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] O. A. Ladyženskaja and N. N. Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, English Transl. Academic Press. New York, 1968.

[8] 李立康, 郭毓陶. 索伯列夫空间引论. 上海：上海科学技术出版社, 1981.

[9] L. Nirenberg. *On elliptic partial differential equations*. Ann. Sc. Norm. sup. Pisa, ser. III, XIII, F. II (1959), 115–162.

[10] 王耀东. 偏微分方程的 $L^2$ 理论. 北京：北京大学出版社, 1989.

[11] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论. 北京：科学出版社, 2003.

[12] W P Ziemer *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag, 1989.

[13] 张恭庆, 林源渠 泛函分析讲义 北京 北京大学出版社, 1987

# 索引

**B**